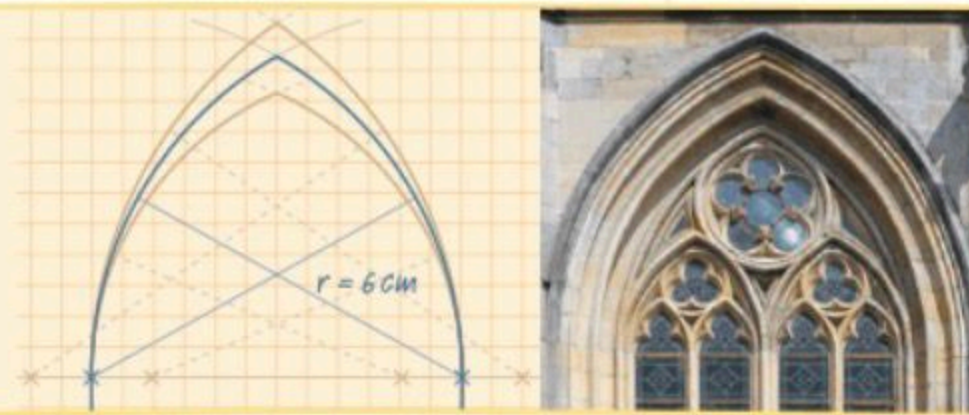


2 Kreisteile

Ein Kennzeichen der Architektur der Gotik ist der Spitzbogen. Zeichne die Figur auf Karopapier ab und bestimme die Länge des blauen Bogens. Fehlende Längen dürfen abgemessen werden. Beschreibe dein Vorgehen.



Häufig werden bei Kreisen nur Teile der Flächen oder des Umfangs betrachtet, zum Beispiel in gotischen Bauten oder auch bei Kirchenfenstern. Wie von diesen Teilen der Flächeninhalt oder auch der Umfang bestimmt werden kann, wird im Folgenden erklärt. Die gefärbte Teilfläche des Kreises heißt **Kreisausschnitt** zum **Mittelpunktswinkel** α . Der zum Kreisausschnitt gehörende Teil der Kreislinie heißt **Kreisbogen** oder auch **Bogenlänge** b .

Beträgt der Mittelpunktswinkel zum Beispiel $\alpha = 90^\circ$, ist der Kreisausschnitt ein Viertel des ganzen Kreises, da 90° einem Anteil von $\frac{1}{4}$ von 360° entsprechen. Damit beträgt der Flächeninhalt A ein Viertel von πr^2 und die Bogenlänge b beträgt ein Viertel von $2\pi r$.

$$b = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = 0,5\pi r$$

Allgemein sind bei gegebenem Radius r der Flächeninhalt A und die Bogenlänge b eines Kreisausschnitts proportional zum Mittelpunktswinkel α und lassen sich daher mit dem Dreisatz berechnen.

Mittelpunktswinkel α	360°	1°	47°	α
Anteil am Vollwinkel	$\frac{360^\circ}{360^\circ} = 1$	$\frac{1^\circ}{360^\circ}$	$\frac{47^\circ}{360^\circ}$	$\frac{\alpha}{360^\circ}$
Flächeninhalt A des Kreisausschnitts	$A = \pi r^2$	$A = \pi r^2 \cdot \frac{1^\circ}{360^\circ}$	$A = \pi r^2 \cdot \frac{47^\circ}{360^\circ}$	$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$
Bogenlänge b	$b = 2\pi r$	$b = 2\pi r \cdot \frac{1^\circ}{360^\circ}$	$b = 2\pi r \cdot \frac{47^\circ}{360^\circ}$	$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

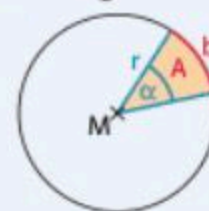
Kreisbogen und Flächeninhalt eines Kreisausschnitts

Für einen **Kreisausschnitt** mit dem **Radius** r und dem **Mittelpunktswinkel** α gilt: Die **Bogenlänge** b entspricht dem Anteil $\frac{\alpha}{360^\circ}$

an dem Kreisumfang $2\pi r$, also gilt $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$.

Der **Flächeninhalt** A entspricht dem Anteil $\frac{\alpha}{360^\circ}$

an der Kreisfläche πr^2 , also gilt $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$.



Beispiel Flächeninhalt, Bogenlänge und Mittelpunktswinkel bestimmen

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius 5 cm.

- Berechne zum Mittelpunktswinkel 54° den Flächeninhalt und die Bogenlänge des Kreisausschnitts.
- Berechne den Mittelpunktswinkel α zu einem Kreisbogen mit einer Länge von 10 cm.

Lösung

a) Anteil des Mittelpunktswinkel am Vollwinkel: $\frac{54^\circ}{360^\circ} = 0,15$

Flächeninhalt des Kreisausschnitts: $A = \pi \cdot 5^2 \cdot 0,15 \approx 11,78$, also $A \approx 11,78 \text{ cm}^2$

Bogenlänge: $b = 2\pi \cdot 5 \cdot 0,15 \approx 4,71$. Also $b \approx 4,71 \text{ cm}$.

b) Anteil des Kreisbogens am Kreisumfang: $\frac{b}{U} = \frac{10}{2\pi \cdot 5} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32$

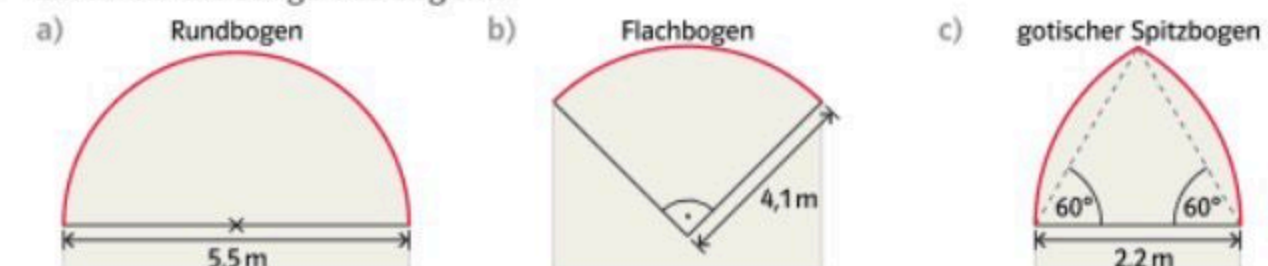
Es gilt $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32$, also $\alpha \approx 0,32 \cdot 360^\circ \approx 115^\circ$.

Aufgaben

- Ordne jedem Kreisausschnitt (K) einen passenden Flächeninhalt (F) sowie eine passende Bogenlänge (B) zu. Verwende für die Überschlagsrechnung $\pi \approx 3$. Die übriggebliebenen Zahlen hinter F bzw. B bilden eine zweistellige Primzahl.

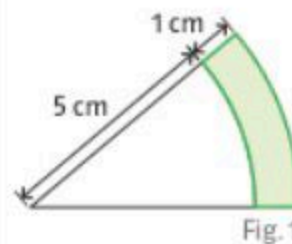
(K1)	(K2)	(K3)
F1 $A = 15 \text{ dm}^2$	F2 $A \approx 50 \text{ dm}^2$	F3 $A = 16 \text{ dm}^2$
B1 $b = 8 \text{ dm}$	B2 $b \approx 9 \text{ dm}$	B3 $b \approx 10 \text{ dm}$
		F4 $A \approx 18 \text{ dm}^2$
		B4 $b \approx 6 \text{ dm}$

- Berechne die Länge des Bogens.



- Der Mittelpunktswinkel in Fig. 1 beträgt $\alpha = 40^\circ$.

- Bestimme den Flächeninhalt der gefärbten Fläche näherungsweise mit $\pi \approx 3$.
- Bestimme den Umfang der gefärbten Fläche näherungsweise mit $\pi \approx 3$.
- Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang aus den Teilaufgaben a) bzw. b) mit dem Taschenrechner und vergleiche die Ergebnisse.



Teste dich!

- Berechne den Flächeninhalt und die Bogenlänge des Kreisausschnitts mit dem Radius $r = 1,2 \text{ m}$ und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 100^\circ$.
- Berechne die Flächeninhalte der gefärbten Flächen näherungsweise mit $\pi \approx 3$.

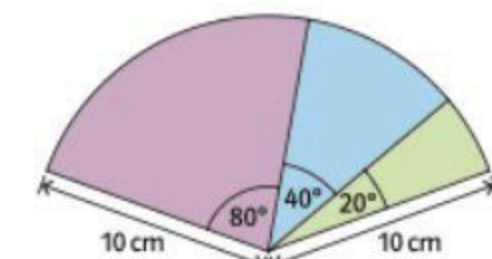


Fig. 1

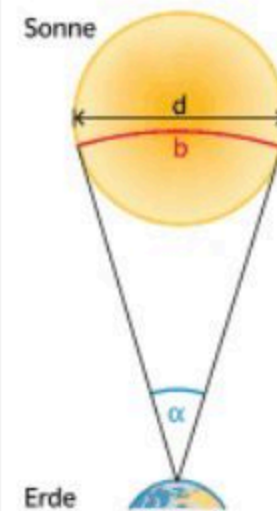
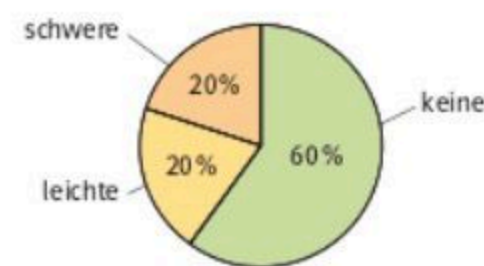
Lösungen, Seite 237

- 6 Berechne die fehlenden Größen für einen Kreisausschnitt mit dem Radius r , dem Mittelpunktswinkel α , der Bogenlänge b und dem Flächeninhalt A .

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
r	2,4 m	3,5 cm	1,2 km			
α	320°			123°	213°	
b		16 cm		4 dm		12 cm
A			0,9 km ²		20 m ²	40 cm ²

- 7 José sagt: „Die Formel für den Flächeninhalt des Kreisausschnitts ist gar nicht neu. Die Anteile der Fläche der Kreisausschnitte an der gesamten Kreisfläche entsprechen wie in Kreisdiagrammen den Anteilen des Mittelpunktswinkel am Vollwinkel.“ Erläutere José's Aussage am Beispiel des Kreisdiagramms rechts.

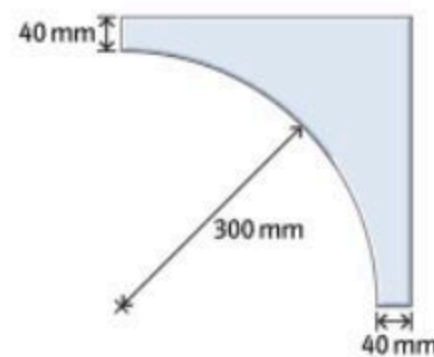
Mängel an den Fahrrädern der Klasse 9:



- 8 Die Erde ist etwa 150 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt und beschreibt während eines Jahres näherungsweise eine Kreisbahn um die Sonne.
- a) Berechne die Streckenlänge, die die Erde an einem Tag auf ihrer Kreisbahn zurücklegt.
- b) Von der Erde aus gesehen nimmt die Sonne einen Winkel von $0,53^\circ$ ein. Berechne die Länge des dazugehörigen Bogens. Diese Bogenlänge ist ein Näherungswert für den Sonnendurchmesser. Recherchiere den tatsächlichen Sonnendurchmesser und vergleiche mit dem Näherungswert.

Teste dich!

- 9 Berechne den Mittelpunktswinkel eines Kreisausschnitts mit dem Radius 4 m, wenn
- a) der Kreisausschnitt die Bogenlänge 6 m hat,
- b) der Kreisausschnitt den Flächeninhalt 20 m^2 hat.
- 10 Bestimme den Flächeninhalt des Blechstücks in der Figur.



- 11 Jedes kleine Quadrat (Fig. 1) hat die Seitenlänge $a = 3 \text{ cm}$. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der gefärbten Fläche.
- 12 Zeichne zwei Kreise mit gleichem Radius, von denen jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht. Berechne die Schnittfläche der beiden Kreise.

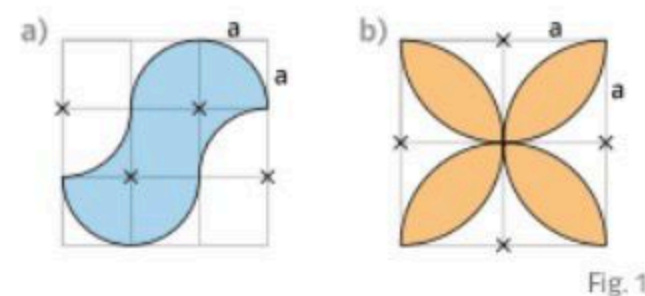


Fig. 1

Teste dein Grundwissen! Gleichungen lösen mit Äquivalenzumformungen

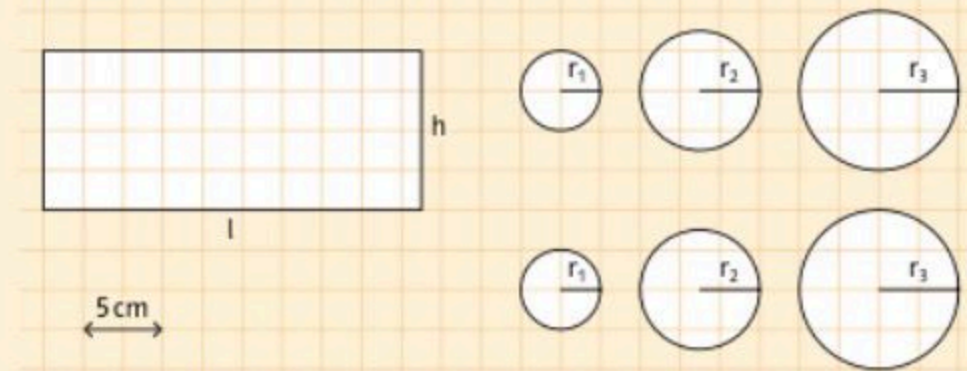
- Löse die Gleichungen. Führe die Probe durch.
- 13 a) $2,5(2 - x) + 0,5 = -3,5x + 3$ b) $(x - 3) \cdot 4 - 24 = -8(3 - x)$ c) $-(-2x + 7) = -91 - 3(x + 2)$

→ Lösungen, Seite 237

→ Grundwissen, Seite 208
→ Lösungen, Seite 237

3 Flächen bei Prismen und Zylindern

Aus dem Rechteck und zwei gleich großen Kreisen soll ein Körper hergestellt werden. Untersucht, welche der drei Kreisgrößen (r_1 , r_2 oder r_3) passt, und baut den Körper im Maßstab 5 : 1 nach.

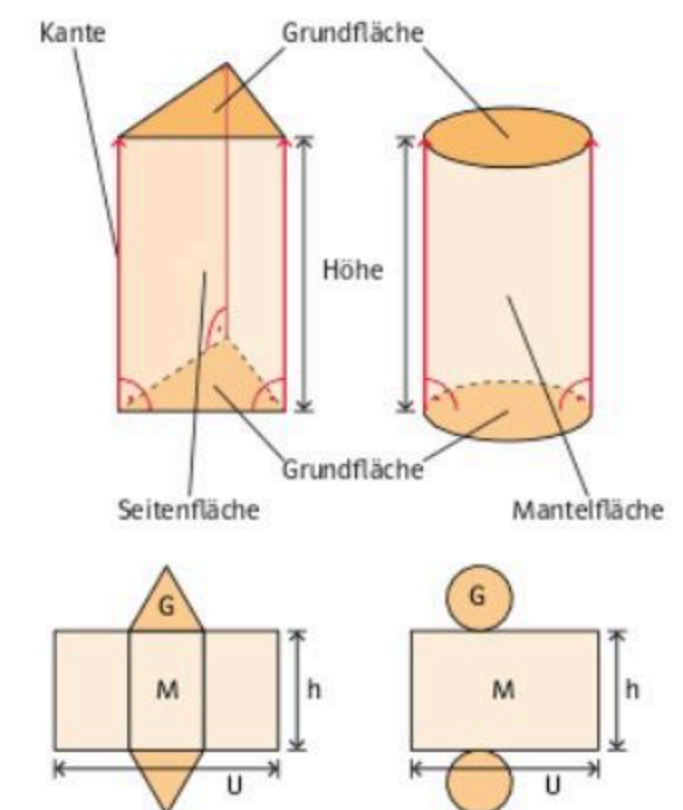


Mithilfe von Kreisen, Kreisteilen und Vielecken wird im Folgenden gezeigt, wie sich der Oberflächeninhalt von verschiedenen Körpern berechnen lässt.

Prismen sind Körper, die man sich durch Verschieben eines Vielecks im Raum entstanden vorstellen kann. Die Verschiebung erfolgt senkrecht zur **Grundfläche**. Der Abstand zwischen den beiden Grundflächen heißt **Höhe** des Prismas. Die **Oberfläche** eines Prismas besteht aus zwei zueinander kongruenten Vielecken als Grundflächen und Rechtecken als Seitenflächen. Die Gesamtheit der Seitenflächen heißt **Mantelfläche** oder **Mantel** des Prismas. Wenn man statt eines Vielecks einen Kreis als Grundfläche betrachtet, erhält man einen **Zylinder**.

Wenn man den Körper entlang einiger seiner Kanten aufschneidet, erhält man das **Netz des Körpers** (s. rechts). Für den Oberflächeninhalt O , den Grundflächeninhalt G und den Inhalt der Mantelfläche M eines Prismas bzw. Zylinders gilt $O = 2 \cdot G + M$.

Der **Inhalt der Mantelfläche** M lässt sich mithilfe des Umfangs U der Grundfläche G und der Höhe h des Prismas berechnen. Es gilt $M = U \cdot h$. Für einen Zylinder mit dem Radius r ergibt sich für den Inhalt der Mantelfläche also $M = 2\pi r \cdot h$. Da die Grundfläche des Zylinders ein Kreis ist, gilt für den Oberflächeninhalt also $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$.



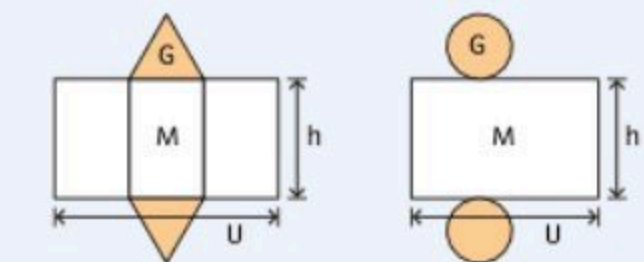
Wenn die Verschiebung wie hier senkrecht zur Grundfläche erfolgt, entsteht ein gerades Prisma. Wir sagen dazu kurz Prisma.

Mantel- und Oberflächeninhalt von Prismen und Zylindern

Für ein Prisma mit der Höhe h , dem Grundflächeninhalt G , dem Umfang der Grundfläche U , dem Oberflächeninhalt O und dem Inhalt der Mantelfläche M gilt:

$M = U \cdot h$ und $O = 2 \cdot G + M$.

Für einen Zylinder mit dem Radius r gilt entsprechend $M = U \cdot h = 2\pi r \cdot h$ und $O = 2 \cdot G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.



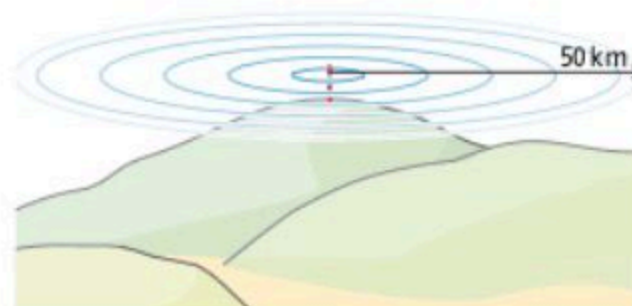
- 2 Francesco berechnet näherungsweise den Flächeninhalt und den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 10 \text{ cm}$ und erhält für $A \approx 314 \text{ cm}^2$ und $U \approx 62,8 \text{ cm}$. Prüfe Francescos Ergebnisse, indem du eine Zeichnung von einem entsprechenden Kreis auf Karopapier anfertigst und den Flächeninhalt sowie Umfang näherungsweise bestimmst.

Tipp
Der Umfang lässt sich mithilfe eines Papierstreifens bestimmen

- 3 Frau Badu macht mit ihren beiden Kindern eine Radtour. Der Raddurchmesser des Fahrrads der Tochter beträgt 30 cm , die Räder des Fahrrads des Sohnes haben einen Durchmesser von 50 cm und die des Fahrrads der Mutter einen von 71 cm . Bestimme die Umdrehungen der Räder pro km und vergleiche die Ergebnisse.



- 4 Das Funksignal eines Radiosenders hat eine Reichweite von 50 km . Ermittle, wie groß der Flächeninhalt des kreisförmigen Sendegebiets ist. Runde sinnvoll.



- 5 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne näherungsweise die fehlenden Größen. Rechne im Kopf mit $\pi \approx 3$. **Lerntipp** Seite 73, Beispiel 1 a)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Radius	10 cm		1,5 mm	5 mm			1,2 cm
Durchmesser		8 dm			10 km	5 m	
Umfang							
Kreisflächeninhalt							

Teste dich!

- 6 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne näherungsweise die fehlenden Größen. Rechne mit $\pi \approx 3$.

	a)	b)	c)
Radius	2 m		1,1 dm
Durchmesser		8 cm	
Umfang			
Kreisflächeninhalt			

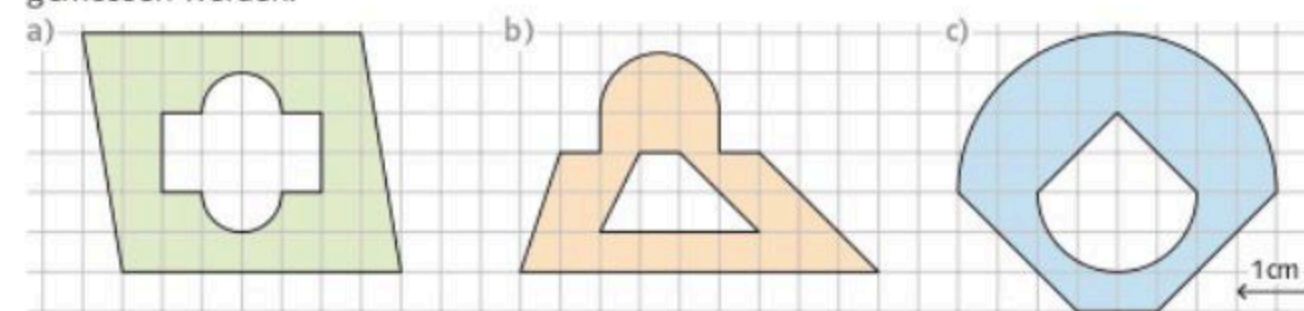
- 7 Ein flacher Topfdeckel hat einen Durchmesser von 20 cm . Berechne näherungsweise seinen Flächeninhalt.

- 8 Bestimme mithilfe einer Überschlagsrechnung zu dem gegebenen Kreis näherungsweise die gesuchten Größen. Rechne mit $\pi \approx 3$.
 a) Der Umfang des Kreises beträgt $U = 60 \text{ cm}$. Bestimme den Radius und den Flächeninhalt des Kreises.
 b) Von einem Kreis ist der Flächeninhalt $A = 30\,000 \text{ m}^2$ gegeben. Bestimme den Radius und den Umfang des Kreises.
 c) Berechne die Größen in den Teilaufgaben a) und b) mit dem Taschenrechner und bestimme jeweils die prozentuale Abweichung des Überschlags im Vergleich zum Ergebnis mit dem Taschenrechner. Beschreibe, was dir auffällt.

Lerntipp
Seite 73, Beispiel 2

Vertiefen
Seite 94, Aufgabe 13

- 9 Bestimme den Flächeninhalt der gefärbten Figur sowie die gesamte Länge der inneren und äußeren Umrandungen. Längen, die nicht berechnet werden können, können im Heft gemessen werden.



- 10 Bei einem 26"-Fahrrad beträgt der Raddurchmesser 26 Zoll. Berechne, welchen Weg das Fahrrad zurücklegt, wenn das Rad 350 Umdrehungen zurückgelegt hat (1 Zoll = 2,54 cm).
 11 In der Pizzeria Raffaella gibt es Pizzen in zwei Größen. Die kleine „Pizza Margherita“ mit einem Durchmesser von 25 cm kostet 5,40 €. Die große „Pizza Margherita“ mit einem Durchmesser von 40 cm kostet 10,80 €.
 a) Schätze zunächst, bei welcher Pizza das „Preis-Leistungs-Verhältnis“ besser ist. Berechne anschließend.
 b) Bestimme den Durchmesser einer Pizza, die doppelt so groß ist, wie die kleine Pizza.
 c) Vergleiche die Preise von Pizzen verschiedener Größen in Pizzerien in deiner Nähe. Beurteile, ob die Preisunterschiede gerechtfertigt sind.

- 12 a) Der Äquator hat eine Länge von ca. 40 000 km. Ermittle, wie groß der Erdradius r ist.
 b) Stell dir vor, ein 40 000 km langes Stahlband, das am Äquator straff um die Erde gespannt war, wird geringfügig um 2 m verlängert und so gespannt, dass der Abstand von der Erde überall gleich ist. Beurteile, ob du jetzt unter diesem Band hindurchkriechen könntest.
 c) Führe dasselbe Gedankenexperiment mit einem PKW-Reifen, der einen Radius von 33 cm hat, durch.



- 13 **Finde den Fehler!**

Beschreibe, was falsch gemacht wurde. Verwende Fachbegriffe. Die Begriffe auf dem Rand können helfen. Korrigiere die Lösung anschließend im Heft.

a) Gegeben: $A_0 = 36 \text{ cm}^2$
Gesucht: d

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot r^2 \\ 36 &= \pi \cdot r^2 & | : \pi \\ 36 &= r^2 & | \sqrt{} \\ 6 &= r \end{aligned}$$

Der Durchmesser beträgt 6 cm.

b) Untersuche, wie sich der Flächeninhalt eines Kreises verändert, wenn man den Radius verdreifacht.

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot r^2 \\ r_{\text{neu}} &= 3 \cdot r \\ A_{\text{neu}} &= \pi \cdot r_{\text{neu}}^2 = \pi \cdot 3 \cdot r^2 \\ \text{also } A_{\text{neu}} &= 3 \cdot A \end{aligned}$$

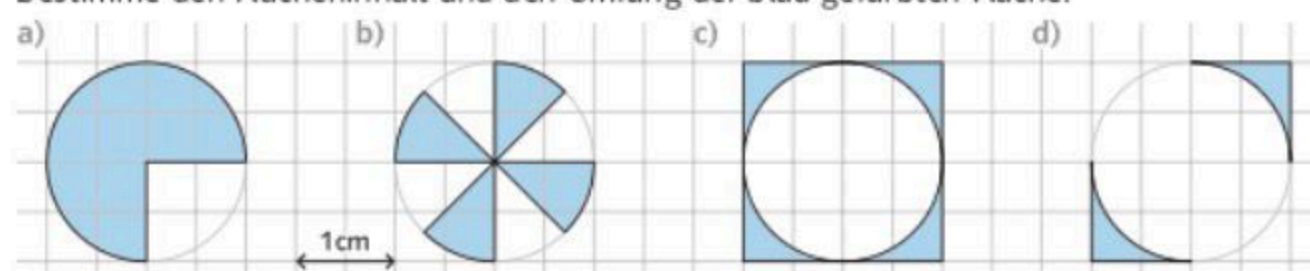
Der Flächeninhalt eines Kreises verdreifacht sich.

Wortliste

- der Radius
- der Durchmesser
- die Kreiszahl π
- Wurzel ziehen
- quadrieren
- dividieren durch
- multiplizieren mit
- der Faktor

- 14 a) Ein Kreis hat einen Radius von 4 cm. Untersuche, wie sich sein Umfang vergrößert, wenn man seinen Radius verdoppelt.
 b) Untersuche, wie sich der Umfang eines beliebigen Kreises vergrößert, wenn man seinen Radius verdoppelt.
 c) Ein Kreis hat einen Umfang von 78 m. Untersuche, wie sich der Durchmesser ändert, wenn der Umfang halb so groß ist.
 d) Untersuche erst an konkreten Beispielen und anschließend allgemein, wie sich der Flächeninhalt eines Kreises ändert, wenn sich der Radius verdoppelt.

- 15 Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der blau gefärbten Fläche.



- 16 Wahr oder falsch?

Beurteile, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe.

Bei einem Hochrad hat das Vorderrad einen Durchmesser von 1,35 m und das Hinterrad einen Durchmesser von 45 cm.

Hakim behauptet:

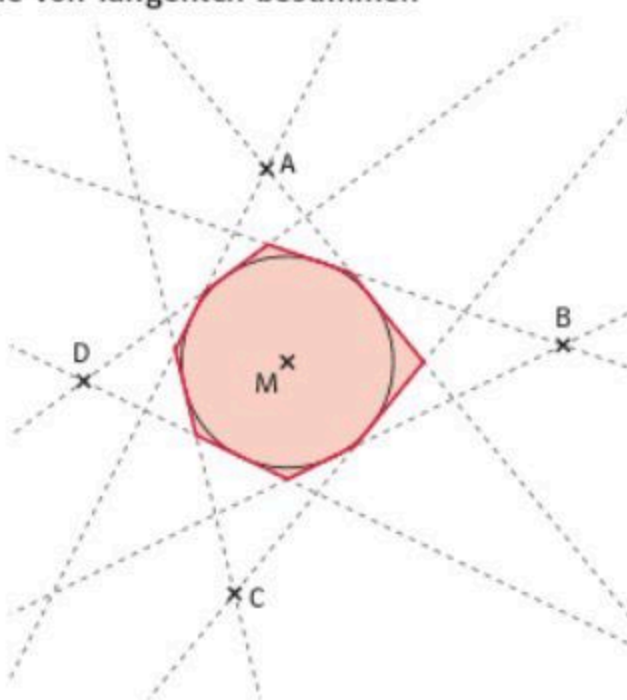
„ $135 : 45 = 3$, also dreht sich das kleine Rad 3-mal so oft wie das große.“



- 17 Näherungswerte für die Kreiszahl π mithilfe von Tangenten bestimmen

Wenn man von Punkten, die außerhalb eines Kreises liegen, Tangenten an einen Kreis konstruiert, dann bilden die Schnittpunkte ein Vieleck. Der Flächeninhalt dieses Vielecks ist größer als der Flächeninhalt des Kreises.

- a) Zeichne mit einer dynamischen Geometriesoftware einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ und vier beliebige Punkte A, B, C, D außerhalb des Kreises. Konstruiere durch A, B, C und D jeweils zwei Tangenten an den Kreis (siehe rechts).
 b) Die Schnittpunkte der Tangenten bilden ein Achteck. Lass dieses Achteck sowie den Flächeninhalt des Achtecks anzeigen.
 c) Variiere die Lage der Punkte A, B, C und D. Versuche hierbei ein Achteck zu erhalten, dessen Flächeninhalt so wenig wie möglich von dem Flächeninhalt des Kreises abweicht, für den $A_0 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ gilt.
 d) Wenn man mehr als vier Punkte betrachtet, erhält man in Teilaufgabe c) Flächeninhalte des Vielecks, die näher an dem Flächeninhalt des Kreises liegen. Versuche mithilfe von Vielecken, die als Schnittpunkte von Tangenten entstehen, einen möglichst guten Näherungswert für π zu erhalten. Berechne, um wie viel Prozent dieser vom Wert des Taschenrechners für π abweicht.



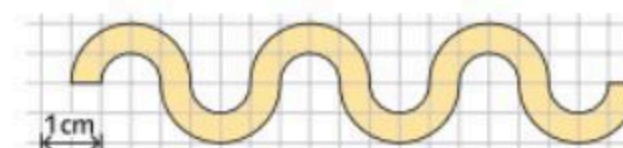
Lerntipp
Seite 73, Beispiel 1b)

Vertiefen
Seite 100, Exkursion

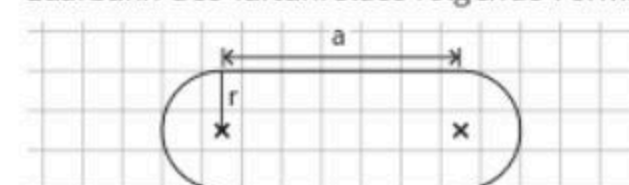
Zur Erinnerung:
Die Gerade, die einen Kreis berührt (also genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis hat), heißt **Tangente**. Die Strecke vom Mittelpunkt des Kreises zum Berührungspunkt der Tangente bildet mit der Tangente einen rechten Winkel.

Teste dich!

- 18 a) Berechne die Länge des Randes der abgebildeten gelben Figur.
 b) Ermittle den Flächeninhalt der gelben Figur.



- 19 In Leichtathletikstadien hat die innere Laufbahn des Tartanfeldes folgende Form.



Dabei können die Längen r und a variieren.

- a) Stelle eine Formel zur Berechnung der Länge der inneren Laufbahn auf.
 b) Berechne die Länge der inneren Laufbahn für $r = 36,90$ m und $a = 84$ m.
 c) Berechne die Länge der sechsten Bahn auf der Innenseite, wenn jede Laufbahn 1,22 m breit ist. Erläutere, warum 400-m-Läufer im Wettkampf immer versetzt starten und berechne den „Vorsprung“, den ein 400-m-Läufer beim Start auf der zweiten Bahn gegenüber dem Läufer auf der ersten Bahn haben muss.



- 20 Bei den folgenden Figuren verdoppelt sich oben immer die Anzahl der Bögen.
 a) Zeichne die vier Figuren in dein Heft, sodass der blaue Kreisbogen den Radius 2 cm hat.
 b) Berechne jeweils die Länge des blauen und des roten Randes und vergleiche die Umfänge.



- 21 Die 5 m breite Straße des Kreisverkehrs auf dem Foto wurde neu asphaltiert. Die Oberfläche der Straße im Kreisverkehr hat einen Flächeninhalt von 550 m^2 . In der Mitte des Kreisverkehrs soll neuer Rasen gesät werden.



- a) Schätze, für wie viele Quadratmeter Rasenfläche Samen gekauft werden muss. Erstelle zunächst eine beschriftete Skizze und begründe deine Schätzung.
 b) Berechne die Rasenfläche im Inneren des Kreisverkehrs.

- 22 Wahr oder falsch?

Beurteile, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe.

„Es gibt ein Quadrat, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Umkreises dieses Quadrats.“

Teste dein Grundwissen!

Gleichungen lösen

- 23 Löse die Gleichung und mache die Probe.

a) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}x - 3,5$

b) $7\frac{3}{5} - \frac{7}{3}x = 0,6$

c) $-23,4 = \frac{3}{5} - \frac{3}{8}x$

Lösungen, Seite 236

Erforschen
Seite 97, Aufgabe 24

Grundwissen, Seite 208
Lösungen, Seite 237

1 Kreisumfang und Kreisfläche

Tina möchte an ihrem Fahrrad einen Kilometerzähler anbringen. In der Bedienungsanleitung liest sie:

- Bringen Sie an der Fahrradgabel und an einer Speiche des Vorderrads jeweils einen kleinen Magneten an.
- Geben Sie den Durchmesser des Vorderrads in den Kilometerzähler ein.

Wie funktioniert dieser Kilometerzähler?



Bisher wurde der Umfang und der Flächeninhalt von Figuren berechnet, die geradlinige Seiten haben. Wie man den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises ermitteln kann, wird im Folgenden gezeigt.

Kreisumfang

Bei den Gegenständen in Fig. 1 wurden jeweils der Durchmesser und der Umfang gemessen und die Werte in eine Tabelle eingetragen. In der letzten Spalte wurde jeweils der Quotient aus Umfang und Durchmesser berechnet. Man erkennt, dass der Umfang bei allen Gegenständen etwas mehr als dreimal so groß ist wie der Durchmesser. Es ist zu vermuten, dass der Kreisumfang proportional zum Durchmesser ist und dass der Proportionalitätsfaktor etwa 3 ist. Aufgrund von Messungenauigkeiten sind die Werte $U : d$ in der Tabelle nicht exakt gleich. Man kann zeigen, dass bei Verwendung exakter Werte der Quotient $U : d$ stets den gleichen Wert ergibt. Dieser Wert heißt **Kreiszahl π** (sprich: pi) und beträgt ungefähr 3,14.

Es gilt $\pi = \frac{U}{d}$. Nach U aufgelöst erhält man: $U = \pi \cdot d = \pi \cdot 2 \cdot r = 2\pi r$.

Kreisfläche

Wenn man die Formel $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ kennt, kann man eine Formel für den Flächeninhalt des Kreises herleiten. Rechts wird ein Kreis vom Mittelpunkt aus in gleich große Kreisteile aufgeteilt, von denen einer zusätzlich noch halbiert wird. Man kann dann die Kreisteile zu einer annähernd rechteckigen Fläche zusammenlegen. Je größer die Anzahl der Kreisteile ist, desto mehr gleicht die zusammengesetzte Figur einem Rechteck. Für die beiden Seitenlängen des Rechtecks gilt:

- die eine Seitenlänge entspricht dem Radius des Kreises, also r .
- die zweite Seitenlänge ist etwa halb so groß wie der Umfang des Kreises, also $\frac{U}{2}$.

Da $U = 2\pi r$ gilt, lässt sich der Flächeninhalt des Rechtecks wie folgt berechnen:

$$A_{\square} = \frac{U}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi \cdot r \cdot r = \pi r^2. \text{ Damit gilt auch } A_{\bigcirc} = \pi r^2.$$

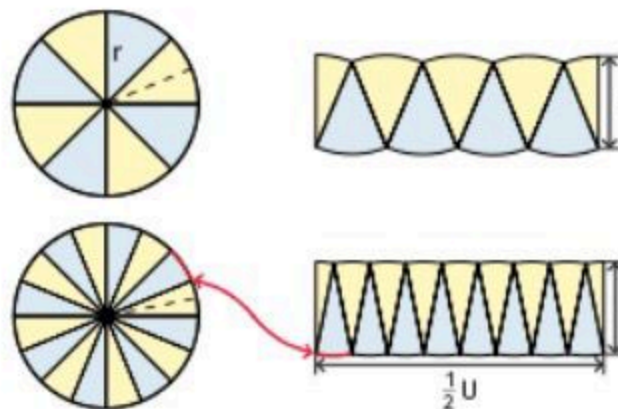


Fig. 1

Den Begriff „proportional“ kannst du im Grundwissen auf Seite 210 nachschlagen.

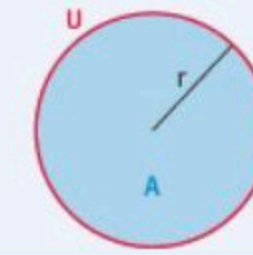
π ist eine irrationale Zahl. Daher kann man π nicht exakt als Dezimalzahl angeben. Mithilfe von Computern hat man mittlerweile einen Näherungswert für π mit über 200 Milliarden Nachkommastellen bestimmt.

3,141592653589793
238462643383279502
88 419 716
9 399 375
105 820
974 944
592 307
816 406
8620 8998 62
8034 825342
117 0679

Umfang und Flächeninhalt eines Kreises

Für einen Kreis mit dem Radius r , dem Umfang U und dem Flächeninhalt A gilt

$$\begin{aligned} \text{Umfang: } U &= 2\pi r = \pi d \\ \text{Flächeninhalt: } A &= \pi r^2 \end{aligned}$$



Zur Erinnerung: Vor Klammern und zwischen Zahlen und Variablen kann man auf den Malpunkt verzichten, z.B.: $2 \cdot \pi \cdot r = 2\pi r$

Diese Formeln kann man zur Berechnung des Radius nach r auflösen:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r \quad | : (2 \cdot \pi)$$

$$\frac{U}{2 \cdot \pi} = r \text{ bzw. } r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$$

$$A = \pi \cdot r^2 \quad | : \pi$$

$$\frac{A}{\pi} = r^2 \quad | \sqrt{}$$

$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$ bzw. $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ Da der Radius r positiv ist, hat die Gleichung nur eine Lösung.

Beispiel 1 Flächeninhalt berechnen

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius $r = 5 \text{ cm}$.

a) Überschlage den Flächeninhalt des Kreises. Berechne ihn anschließend mithilfe des Taschenrechners und vergleiche die beiden Ergebnisse.

Lösung

a) Überschlag mit $\pi \approx 3$:

$$A_{\text{Kreis}} \approx 3 \cdot (5 \text{ cm})^2 = 3 \cdot 25 \text{ cm}^2 = 75 \text{ cm}^2$$

Rechnung mit TR:

$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 = \pi \cdot 25 \text{ cm}^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2$$

Der Überschlag der Kreisfläche ist um etwa $3,5 \text{ cm}^2$ kleiner als die exakte Kreisfläche.

b) Untersuche, wie sich der Flächeninhalt ändert, wenn der Radius verdoppelt wird.

$$\begin{aligned} b) A_{\text{größerer Kreis}} &= \pi \cdot (2 \cdot 5 \text{ cm})^2 \\ &= \pi \cdot 2^2 \cdot (5 \text{ cm})^2 \\ &= \pi \cdot 4 \cdot (5 \text{ cm})^2 \\ &= 4 \cdot \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 = 4 \cdot A_{\text{Kreis}} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt vervierfacht sich.

Beispiel 2 Umfang und Durchmesser von Kreisen berechnen

a) Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 4 \text{ m}$.

Lösung

a) Radius des Kreises:

$$r = d : 2 = 4 \text{ m} : 2 = 2 \text{ m}$$

Umfang des Kreises:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ m} = 4 \cdot \pi \text{ m} \approx 12,6 \text{ m}$$

b) Bestimme den Durchmesser eines Kreises mit dem Umfang $U = 37,7 \text{ cm}$.

$$b) U = \pi \cdot d \quad | : \pi$$

$$d = \frac{U}{\pi}$$

Durchmesser des Kreises:

$$d = \frac{U}{\pi} = \frac{37,7 \text{ cm}}{\pi} \approx 12,0 \text{ cm}$$

Manchmal ist es sinnvoll, das Ergebnis als Vielfaches von π anzugeben.

Aufgaben

- 1 Gegeben sind Angaben zu vier Kreisen. Ordne jedem Radius (R) je zwei Karten mit zugehörigem Umfang (U) und je zwei Karten mit zugehörigem Flächeninhalt (F) zu. Verwende für die Überschlagsrechnung $\pi \approx 3$.

R1	$r = 3 \text{ cm}$	R2	$r = 2 \text{ cm}$	R3	$r = 4 \text{ cm}$	R4	$r = 1,5 \text{ cm}$
U1	$U = 4\pi \text{ cm}$	U2	$U = 3\pi \text{ cm}$	U3	$U = 6\pi \text{ cm}$	U4	$U = 8\pi \text{ cm}$
U5	$U \approx 18,85 \text{ cm}$	U6	$U \approx 25,13 \text{ cm}$	U7	$U = 12,57 \text{ cm}$	U8	$U \approx 9,42 \text{ cm}$
F1	$A = 16\pi \text{ cm}^2$	F2	$A = 9\pi \text{ cm}^2$	F3	$A = 4\pi \text{ cm}^2$	F4	$A = 2,25\pi \text{ cm}^2$
F5	$A = 12,57 \text{ cm}^2$	F6	$A = 7,07 \text{ cm}^2$	F7	$A = 28,27 \text{ cm}^2$	F8	$A = 50,27 \text{ cm}^2$

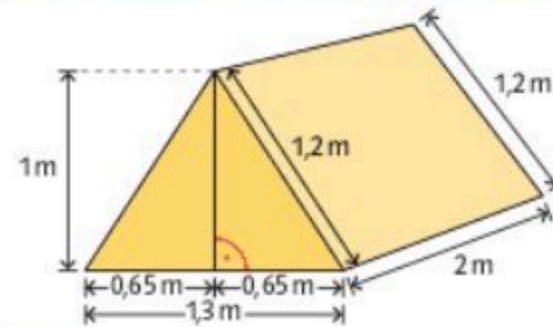
- 12 Pierre hat in seinem Heft die Rechnungen rechts zu einer Aufgabe zum Thema „Prismen“ notiert.
- Finde ein Problem, das zu Pierres Rechnungen passt.
 - Beschreibe dein Vorgehen.

$$1. 132 \text{ cm}^2 - 12 \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$$

$$2. 120 \text{ cm}^2 : 12 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

Teste dich!

- 13 Eine Outdoor-Firma möchte von dem Außenzelt mit den angegebenen Maßen 1000 Stück produzieren lassen. Das Zelt hat keine Bodenplatte. Bestimme, wie viel der notwendige Stoff kostet, wenn man 15% Verschnitt einkalkuliert und 1 m^2 des Stoffes im Einkauf 20 Euro kosten.



Lösungen, Seite 238

- 14 Das Volumen einer quaderförmigen Verpackung mit quadratischer Grundfläche soll 300 ml betragen. Der Hersteller der Verpackung möchte möglichst wenig Material verbrauchen. Ein Mitarbeiter gibt die folgende Funktionsgleichung einer Funktion an, die den Oberflächeninhalt der Verpackung in Abhängigkeit der Seitenlänge a der Grundfläche beschreibt:
- $$O(a) = 2a^2 + \frac{1200}{a}$$

- Zeige, dass sich der Oberflächeninhalt der Verpackung in Abhängigkeit der Seitenlänge a durch die Funktion O beschreiben lässt.
- Zeichne den Graphen der Funktion O mithilfe eines Funktionsplotters und bestimme mithilfe des Programms die Seitenlänge a der Grundfläche, so dass der Materialverbrauch minimal wird.

15 Wahr oder falsch?

Beurteile, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe.

- Wenn man bei einem Zylinder den Radius verdoppelt, vervierfacht sich der Inhalt der Mantelfläche.
- Wenn man bei einem Prisma mit gleichbleibender dreieckiger Grundfläche den Inhalt der Mantelfläche verdoppelt, verdoppelt sich auch die Höhe.
- Wenn man bei einem Prisma den Inhalt der Grundfläche verdoppelt, verdoppelt sich auch der Oberflächeninhalt.

Teste dein Grundwissen! Mit Gleichungen Anwendungsaufgaben lösen

- 16 Eine Schokolade der Sorte Alpenstolz kostet 1,09 €, eine der Sorte Sportglück kostet nur 0,99 €. Timo kauft für 12,28 € insgesamt 12 Tafeln Schokolade. Lucia soll bestimmen, wie viele Tafeln Timo von jeder Sorte gekauft hat und notiert ihre Rechnung rechts.

$$a \cdot 109 + (12 - a) \cdot 99 = 1228$$

$$a \cdot 109 + 12 \cdot 99 - a \cdot 99 = 1228$$

$$a \cdot 10 - 1188 = 1228$$

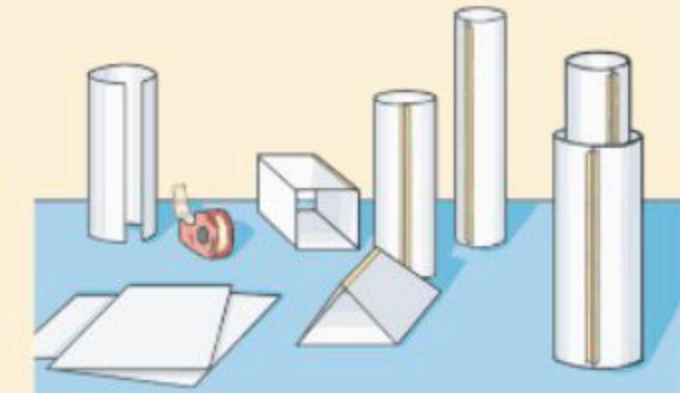
$$\text{also } a = 4$$

- Gib an, für welche Größe die Variable a inhaltlich steht.
- Begründe, warum die Gleichung in der ersten Zeile die Situation richtig beschreibt.
- Erläutere die einzelnen Rechenschritte.
- Gib an, wie viele Tafeln Alpenstolz bzw. Sportglück Timo gekauft hat.

Grundwissen, Seite 208
Lösungen, Seite 238

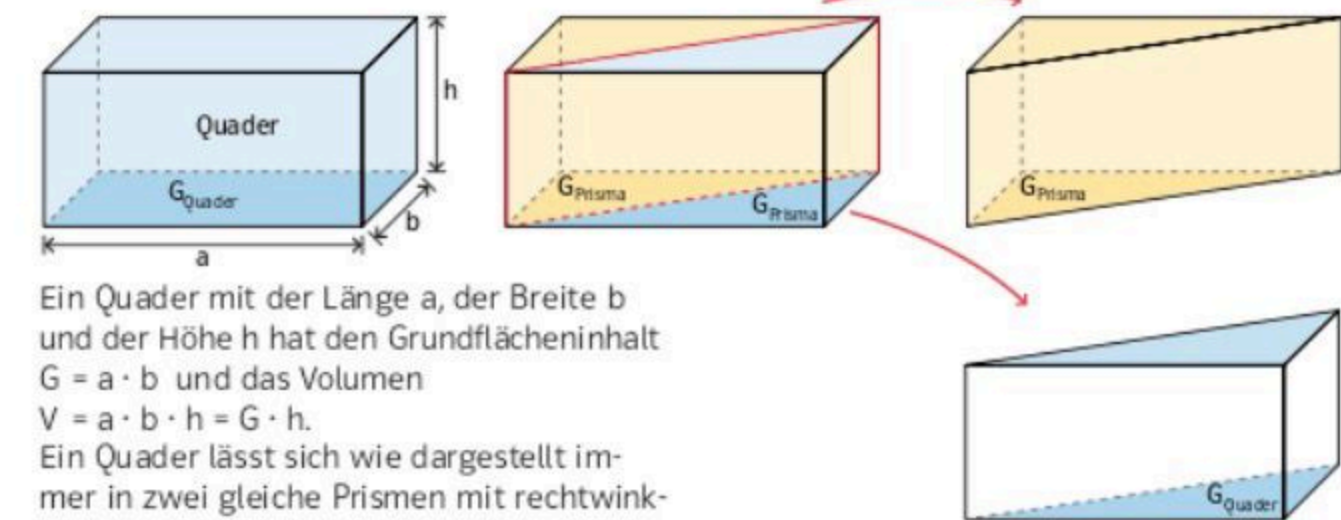
4 Prismen und Zylinder – Volumen

Erstellt aus DIN-A4-Blättern verschiedene Körpermodelle, die oben und unten offen sind. Kleben ist erlaubt, aber für jeden Körper darf nur ein DIN-A4-Blatt verwendet werden. Fertigt eine beschriftete Skizze der Körper an. Welcher Körper hat das größte Volumen? Ihr könnt zur Überprüfung auch geeignetes Füllmaterial verwenden.



Bisher wurden die Mantel- und Oberflächeninhalte von Prismen und Zylindern thematisiert. Im Folgenden wird ausgehend von der Volumenberechnung von Quadern eine Formel für das Volumen von Prismen und Zylindern erarbeitet.

Volumina von Prismen



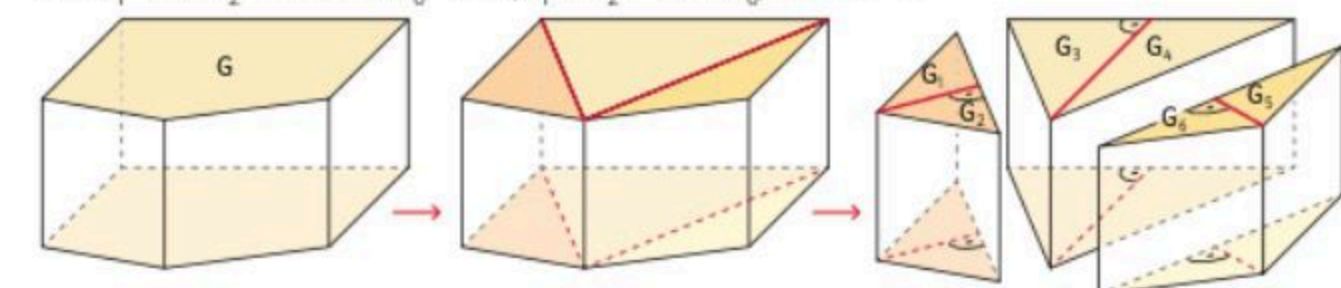
Ein Quader mit der Länge a , der Breite b und der Höhe h hat den Grundflächeninhalt $G = a \cdot b$ und das Volumen $V = a \cdot b \cdot h = G \cdot h$.

Ein Quader lässt sich wie dargestellt immer in zwei gleiche Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundfläche zerlegen.

Diese beiden Prismen haben jeweils den halben Grundflächeninhalt und das halbe Volumen des Quaders. Es gilt also $V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Quader}} = \frac{1}{2} \cdot G_{\text{Quader}} \cdot h = G_{\text{Prisma}} \cdot h$. Somit gilt die Formel $V = G \cdot h$ auch für Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundfläche.

Ein beliebiges Prisma kann man zunächst in Prismen mit dreieckiger Grundfläche zerlegen und diese dann in Prismen, deren Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind. Somit gilt zum Beispiel für das Volumen des folgenden Prismas:

$$V = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + \dots + G_6 \cdot h = (G_1 + G_2 + \dots + G_6) \cdot h = G \cdot h.$$



Dieses Verfahren kann man bei beliebigen Prismen durchführen. Es gilt demnach für alle Prismen mit der Grundfläche G und der Höhe h die Volumenformel $V = G \cdot h$.

Beispiel 1 Oberflächeninhalt eines Prismas berechnen

Berechne den Oberflächeninhalt des abgebildeten Prismas.

Lösung

Die Grundfläche ist ein Trapez.

$$G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

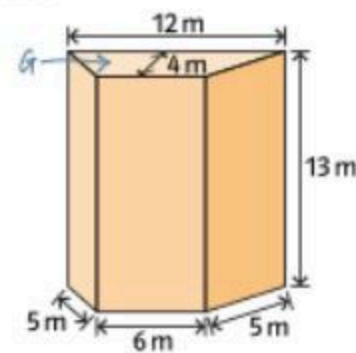
$$= \frac{1}{2} \cdot (6\text{ m} + 12\text{ m}) \cdot 4\text{ m} = \frac{1}{2} \cdot 18\text{ m} \cdot 4\text{ m} = 36\text{ m}^2$$

$$M = U \cdot h = (5\text{ m} + 6\text{ m} + 5\text{ m} + 12\text{ m}) \cdot 13\text{ m}$$

$$= 28\text{ m} \cdot 13\text{ m} = 364\text{ m}^2$$

$$O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 36\text{ m}^2 + 364\text{ m}^2$$

$$= 72\text{ m}^2 + 364\text{ m}^2 = 436\text{ m}^2$$



Man kann die **Rechnung mit oder ohne Einheiten** notieren. Es ist dann sinnvoll, die Einheiten wegzulassen, wenn die Rechnung dadurch übersichtlicher ist. Grundsätzlich muss man bei der Rechnung darauf achten, die Einheiten anzupassen.

Beispiel 2 Mantelflächen- und Oberflächeninhalt eines Zylinders berechnen

Berechne den Mantelflächen- und Oberflächeninhalt des abgebildeten zylindrischen Stabes, der eine Höhe von 1,5 m hat.



Lösung

Zuerst muss der Radius bestimmt und die Einheiten angepasst werden.

Mit $r = 2\text{ cm} : 2 = 1\text{ cm}$ und $h = 1,5\text{ m} = 150\text{ cm}$ erhält man für den Inhalt der Mantelfläche $M = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 150 = 300\pi \approx 942,48$.

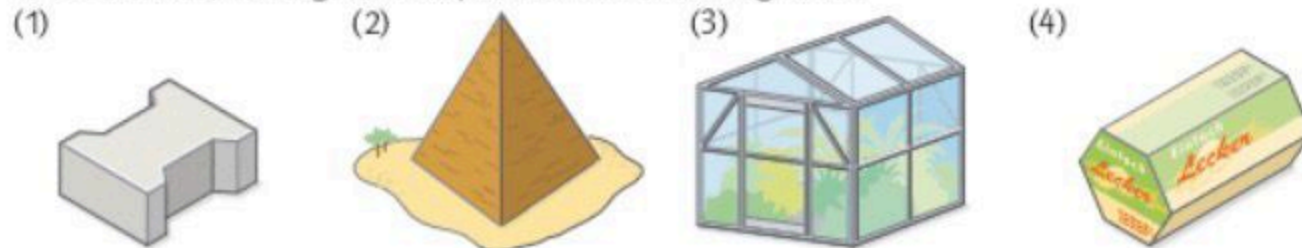
Somit gilt für den Oberflächeninhalt

$$O = 2 \cdot G + M = 2\pi r^2 + M = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 + 300\pi = 302\pi \approx 948,76$$

Der Stab hat einen Mantelflächeninhalt von ungefähr $942,48\text{ cm}^2$, und sein Oberflächeninhalt beträgt etwa $948,76\text{ cm}^2$.

Aufgaben

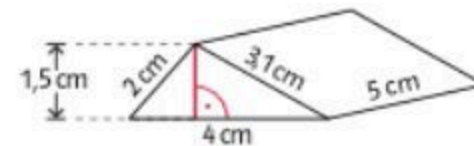
- 1 a) Entscheide, ob folgende Körper Prismen sind. Begründe.



Manchmal muss man sich das abgebildete Prisma gedreht vorstellen, um die Grundfläche und die Höhe besser zu erkennen.

- b) Notiere Beispiele von Körpern aus der Umwelt, dem Supermarkt etc., die näherungsweise Prismen bzw. Zylinder sind und sammle Bilder von den Gegenständen.

- 2 Gegeben ist ein Prisma mit den rechts angegebenen Maßen. Berechne den Inhalt der Mantelfläche und den Oberflächeninhalt des Prismas.



- 3 Bei einem Zylinder mit der Höhe $h = 5\text{ cm}$ hat die Grundfläche einen Radius von $r = 2\text{ cm}$. Verwende bei den Rechnungen $\pi \approx 3$.
- a) Bestimme näherungsweise den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders.
- b) Bestimme näherungsweise den Oberflächeninhalt des Zylinders.

- 4 Eine zylinderförmige Walze hat einen Durchmesser von 1,10 m und ist 2,10 m breit.
- a) Berechne, welche Fläche bei einer Umdrehung von der Walze abgewalzt wird.
- b) Die komplette Walze soll gestrichen werden. Bestimme, für welche Fläche Farbe gekauft werden muss.

→ **Lerntipp**
Seite 82, Beispiel 1

→ **Lerntipp**
Seite 82, Beispiel 2

Methode
Unbekannte Wörter verstehen
2n79pi

- 5 Alma hat in ihrem Heft die „Merkhilfen“ rechts notiert.
- a) Finde zu jeder „Merkhilfe“ eine passende Aufgabe. Überlege dir mögliche Maße.
- b) Löst gegenseitig eure Aufgaben.
- 6 Im Jahre 1855 errichtete der Berliner Drucker Ernst Litfaß die erste Reklamesäule. Bei einer Firma kann man Litfaßsäulen in unterschiedlicher Ausführung bestellen. Bestimme jeweils die Größe der Werbefläche, die beklebt werden kann.
- a) Standardsäule: Höhe 1,92 m; $\varnothing$ 62 cm
- b) Messesäule: Höhe 3,50 m; $\varnothing$ 100 cm
- c) Edelstahlsäule: Höhe 2,6 m; $\varnothing$ 95 cm

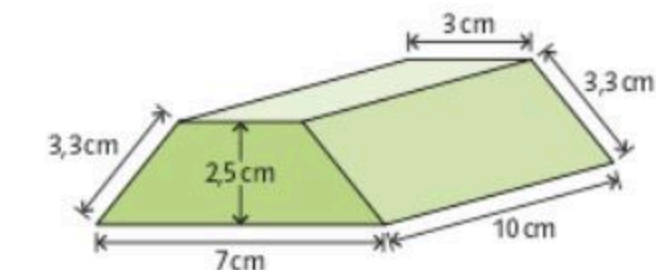
1. Mantelflächeninhalt durch Umfang
= Höhe
2. Oberflächeninhalt minus Mantelflächeninhalt durch 2 = Grundflächeninhalt.



Der Durchmesser wird manchmal auch mit dem Zeichen $\varnothing$ angegeben.

Teste dich!

- 7 Berechne den Inhalt der Mantelfläche und den Oberflächeninhalt des rechts abgebildeten Prismas.
- 8 Berechne den Inhalt der Mantelfläche und den Oberflächeninhalt eines Zylinders mit dem Durchmesser 16 cm und der Höhe 8 cm.

**9 Wahr oder falsch?**

Beurteile, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe.

- a) Die Oberfläche eines Prismas mit 6-eckiger Grundfläche besitzt 8 Begrenzungsflächen.
- b) Jedes Prisma ist ein Quader.
- c) Es gibt Prismen, deren Seitenflächen Quadrate sind.
- d) Bei jedem Prisma ist die Anzahl der Kanten dreimal so groß wie die Anzahl der Ecken.
- e) Jeder Würfel ist ein Prisma.
- f) Jeder Zylinder ist ein Prisma.

- 10 Ein zylinderförmiger Brunnen mit einem Durchmesser von 2,50 m wird 14,50 m tief ausgeschachtet und ausgemauert. Nach oben bekommt er ebenfalls aus Steinen eine 0,8 m hohe Brüstung. Ermittle, wie viele Steine man vermutlich insgesamt benötigt, wenn man davon ausgeht, dass 60 Steine für 1 m^2 reichen.

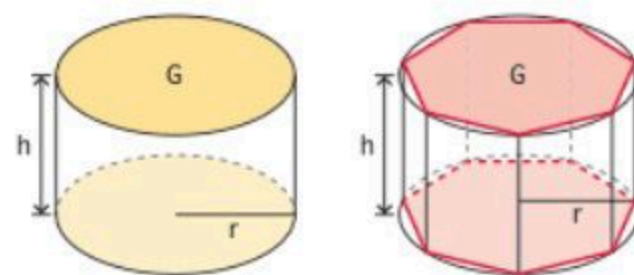


- 11 Ein Zylinder mit der Höhe h besitzt eine Grundfläche mit dem Radius r , den Oberflächeninhalt O und den Mantelflächeninhalt M . Bestimme die fehlenden Größen. Kontrolliere dein Ergebnis mithilfe einer Überschlagsrechnung.

r	3 dm		60 dm	
h		15 m		11 cm
M	94 dm ²	375 m ²	420 m ²	69 mm ²
O				

Volumina von Zylindern

Ein Zylinder hat als Grundfläche einen Kreis. Da man den Kreis durch Vielecke beliebig genau annähern kann, kann man auch den Zylinder durch Prismen beliebig genau annähern. Für die Prismen gilt die Volumenformel $V = G \cdot h$. Also gilt auch für das Zylindervolumen die Formel $V = G \cdot h$. Wegen $G = \pi r^2$ folgt für den Zylinder $V = \pi r^2 \cdot h$.

**Volumina von Prismen und Zylindern**

Das Volumen V von Prismen und Zylindern mit der Grundfläche G und der Höhe h berechnet man mit der Formel $V = G \cdot h$. Für einen Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche G gilt demnach $V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.

Beispiel 1 Volumen eines Prismas

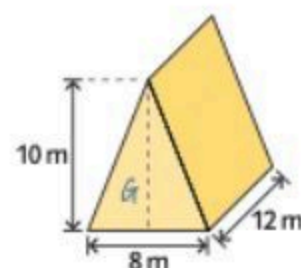
Berechne das Volumen des dargestellten Prismas.

Lösung

Die Grundfläche ist ein Dreieck mit $g = 8\text{ m}$ und $h_g = 10\text{ m}$.

$$G = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ m} \cdot 10\text{ m} = 40\text{ m}^2$$

$$V = G \cdot h = 40\text{ m}^2 \cdot 12\text{ m} = 480\text{ m}^3$$



Man kann die **Rechnung mit oder ohne Einheiten** notieren. Es ist dann sinnvoll, die Einheiten wegzulassen, wenn die Rechnung dadurch übersichtlicher ist. Grundsätzlich muss man bei der Rechnung darauf achten, die Einheiten anzupassen.

Beispiel 2 Volumen eines Zylinders

Das Volumen eines zylindrischen Stabes mit einem Durchmesser von $0,5\text{ dm}$ beträgt 625 cm^3 . Berechne die Länge des Stabes. Erstelle dazu auch eine beschriftete Skizze.

Lösung

Da der Stab zylindrisch ist, kann man die Formel $V = \pi r^2 \cdot h$ verwenden. Die gesuchte Länge entspricht der Höhe h des Zylinders.

Zuerst muss man die Einheiten anpassen.

$$r = d : 2 = 0,5\text{ dm} : 2 = 2,5\text{ cm}$$

Einsetzen der gegebenen Größen und Auflösen der Gleichung:

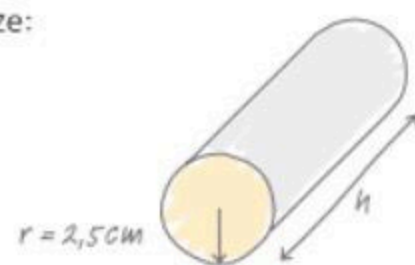
$$625 = \pi \cdot 2,5^2 \cdot h$$

$$625 = \pi \cdot 6,25 \cdot h \quad | : 6,25$$

$$100 = \pi \cdot h \quad | : \pi$$

$$100 : \pi = h \text{ bzw. } h = 100 : \pi \approx 31,8$$

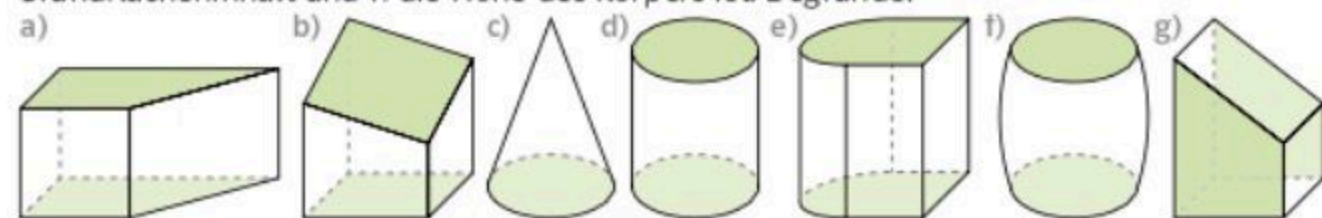
Skizze:



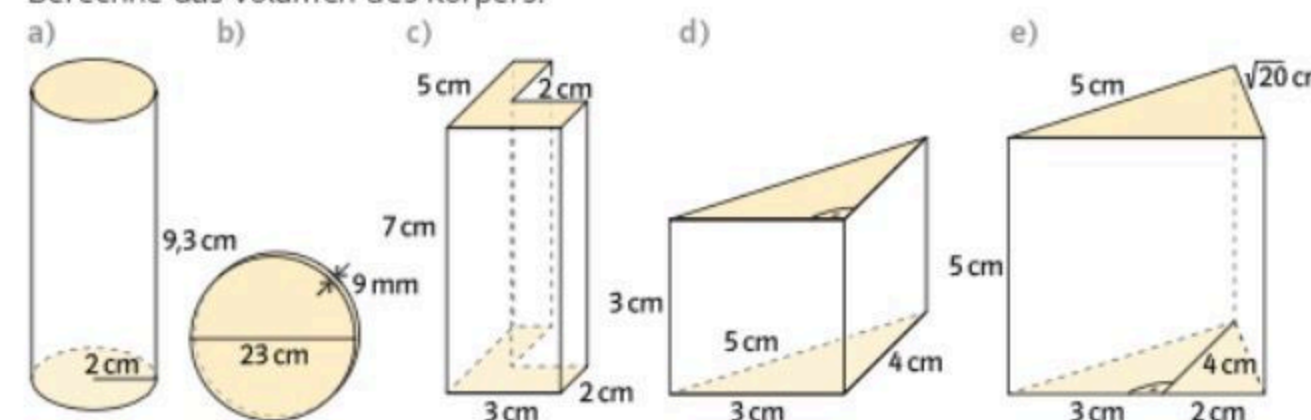
Der Stab ist ungefähr 31,8 cm lang.

Aufgaben

- 1 Entscheide, für welche Körper man die Formel $V = G \cdot h$ verwenden kann, wobei G der Grundflächeninhalt und h die Höhe des Körpers ist. Begründe.

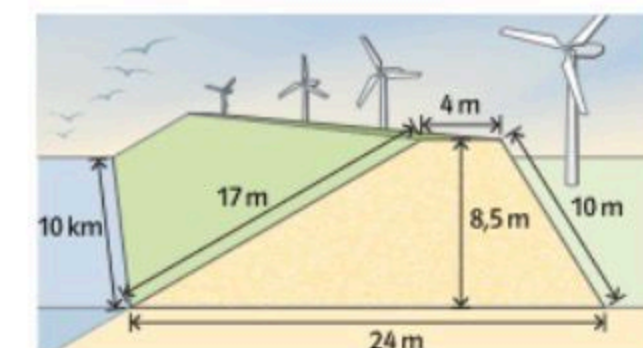


- 2 Berechne das Volumen des Körpers.

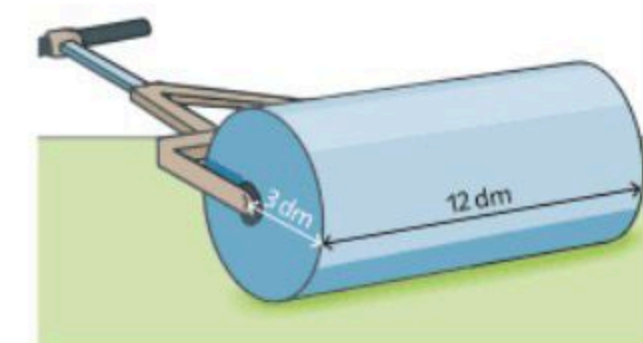


- 3 Zum Schutz vor Sturmfluten baut man an den Küsten Deiche, die das Überfluten des dahinterliegenden Landes verhindern sollen.

Ein Deich hat auf einer Länge von 10 km den rechts abgebildeten Querschnitt. Berechne, wie viele Kubikmeter Erde man zum Bau des abgebildeten Deichs benötigt.



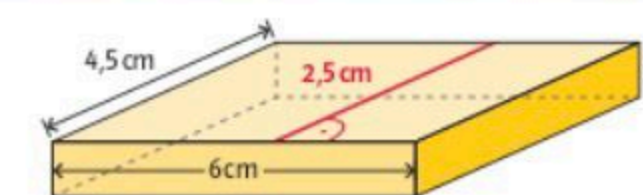
- 4 Familie Dichans möchte ihre neu angelegte Rasenfläche walzen, damit die Saat optimal anwachsen kann. Dazu will Frau Dichans die Walze vollständig mit Wasser füllen, damit sie das notwendige Gewicht erhält. Bestimme näherungsweise, wie viele Liter Wasser man benötigt, um die Walze vollständig zu füllen und gib dann deren Masse an. Rechne mit $\pi \approx 3$.



Zur Erinnerung:
 $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3 \approx 1\text{ kg}$

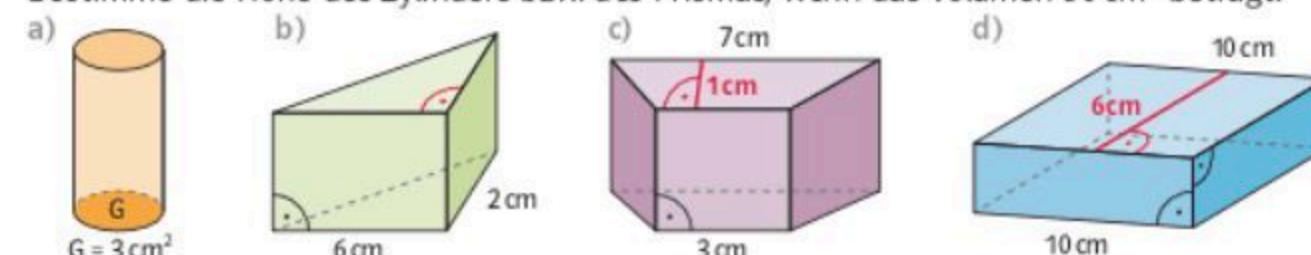
Teste dich!

- 5 Das Prisma in der Figur mit der Höhe $h = 4\text{ mm}$ hat als Grundfläche ein Parallelogramm mit den in der Figur angegebenen Maßen. Berechne das Volumen des Prismas.



- 6 a) Ermittle das Volumen eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 22\text{ m}$ und der Höhe $h = 3\text{ m}$.
b) Ein Prisma mit der Höhe $h = 3\text{ dm}$ hat eine dreieckige Grundfläche mit der Grundseite $g = 5\text{ dm}$ und der Höhe $h_g = 2\text{ dm}$. Berechne sein Volumen.

- 7 Bestimme die Höhe des Zylinders bzw. des Prismas, wenn das Volumen 30 cm^3 beträgt.

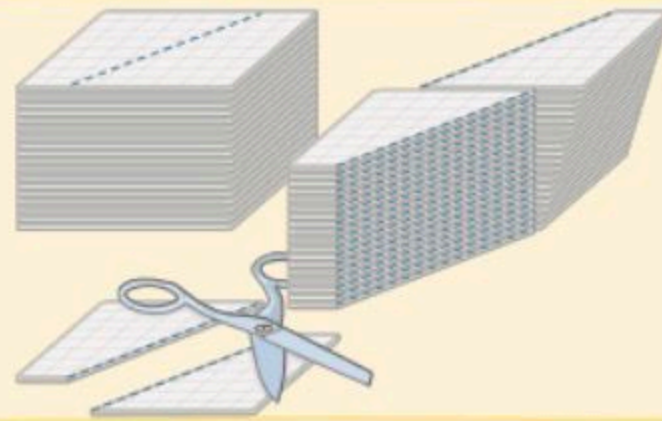


Lerntipp
Seite 86, Beispiel 1 und 2
Üben
Seite 94, Aufgabe 8

Lösungen, Seite 238

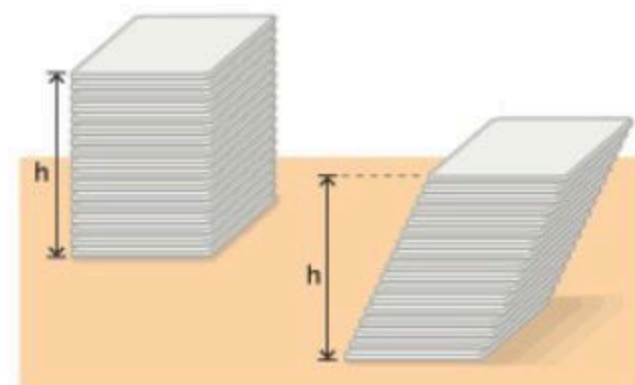
5 Das Prinzip von Cavalieri

Susan hat von einem Haufen Bierdeckel jeden einzelnen auf die gleiche Weise zerschnitten und neu zusammengelegt. Zerschneide selbst Bierdeckel und lege sie neu zusammen. Vergleiche die Grundflächeninhalte und Volumina der entstehenden Körper.



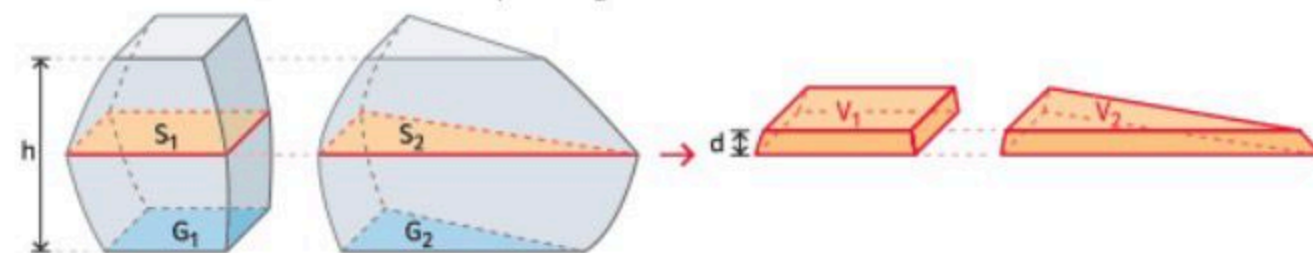
In einem Parallelogramm hängt der Flächeninhalt nur von der Grundseite und der Höhe ab. Dass sich dieser Sachverhalt auch auf Körper übertragen lässt, wird im Folgenden gezeigt.

Verformt man den Stapel quadratischer Notizblätter so, dass die einzelnen Blätter weiterhin parallel zueinander liegen, so bleiben die zur Grundfläche parallelen Querschnittsflächen gleich. Auch die Höhe des Stapels bleibt unverändert. Da kein Blatt hinzugefügt oder weggenommen wurde, bleibt das Volumen des Stapels ebenfalls gleich.



Dieser Zusammenhang lässt sich beim Vergleich zweier Körper nutzen, die die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

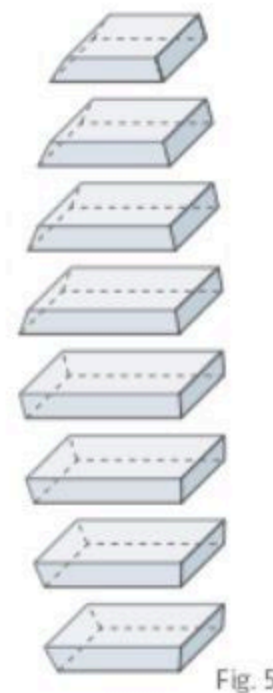
1. Die Flächeninhalte der Grundflächen sind gleich groß: $G_1 = G_2$.
2. Die Körper haben die gleichen Höhen.
3. Im gleichen Abstand parallel zur Grundfläche liegende Schnittflächen haben den gleichen Flächeninhalt: $S_1 = S_2$.
Die Form der Schnittflächen S_1 und S_2 kann hierbei verschieden sein.



Die zwei in Fig. 1 und Fig. 2 dargestellten Körper erfüllen die obigen Voraussetzungen. Aus beiden werden in gleicher Höhe parallel zur Grundfläche Scheiben der Dicke d ausgeschnitten (vgl. Fig. 3 und Fig. 4).

Je kleiner man d wählt, umso weniger unterscheiden sich Grund- und Deckflächeninhalt der Scheiben. Diese Scheiben können dann näherungsweise als Prismen betrachtet werden und haben somit annähernd das gleiche Volumen.

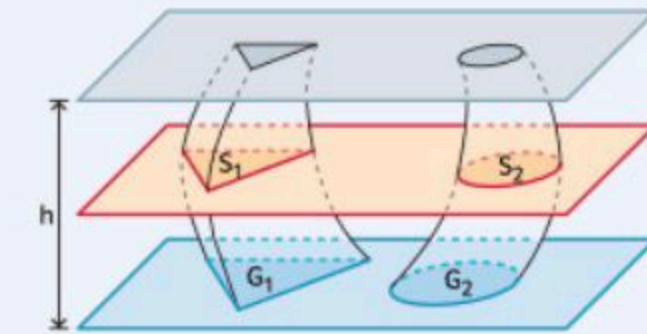
Diese Überlegung gilt für jedes derart herausgeschnittene Scheibenpaar. Auf diese Art lassen sich beide Körper vollständig in paarweise volumengleiche Scheiben zerlegen (siehe Fig. 5). Also ist auch das Volumen der beiden Körper gleich groß.



Satz des Cavalieri

Zwei Körper haben das gleiche Volumen, wenn für sie gilt:

1. Die Flächeninhalte der Grundflächen sind gleich: $G_1 = G_2$.
2. Sie haben die gleichen Höhen.
3. Ihre Schnittflächen, im gleichen Abstand parallel zur Grundfläche, haben den gleichen Flächeninhalt: $S_1 = S_2$.



Beispiel Volumen eines schiefen Körpers berechnen

Berechne das Volumen des Körpers in Fig. 1.

Lösung

Der Körper hat das gleiche Volumen wie ein 10 cm hoher Zylinder mit dem Grundkreisdurchmesser 4 cm (Fig. 2).

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} \approx 126 \text{ cm}^3.$$

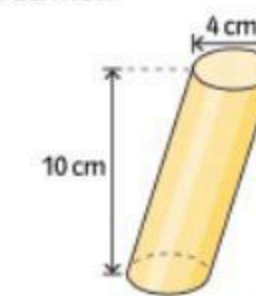


Fig. 1

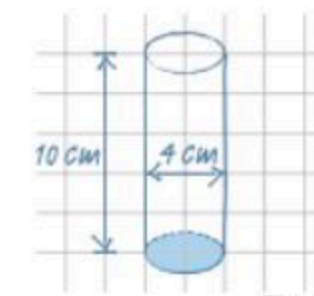
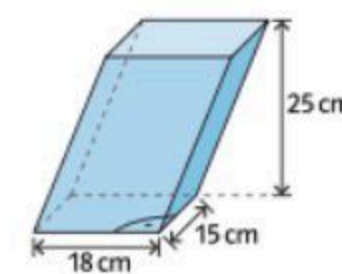


Fig. 2

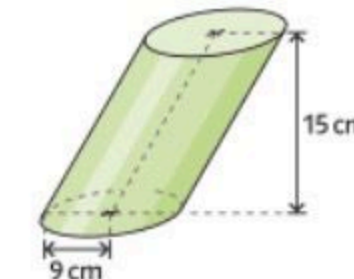
Aufgaben

- 1 Berechne das Volumen der Körper.

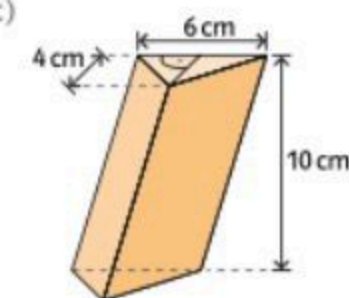
a)



b)



c)

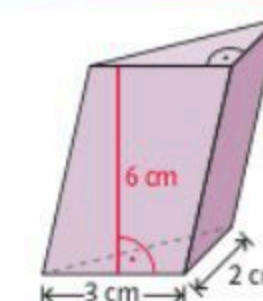


- d) Skizziere für die Teilaufgaben a) und c) jeweils das Schrägbild eines Quaders, der die gleiche Höhe und das gleiche Volumen hat wie der gezeigte Körper und beschrifte den Quader jeweils mit seinen Maßen.

- 2 Der Cayan Tower ist ein Wolkenkratzer in Dubai. Die Höhe des Turms beträgt bei 76 Stockwerken 306 Meter, seine Gestalt zeichnet sich durch eine 90-Grad-Drehung nach oben hin aus. Bestimme das Volumen des Gebäudes, wenn jedes Stockwerk eine Fläche von 111 m^2 hat.

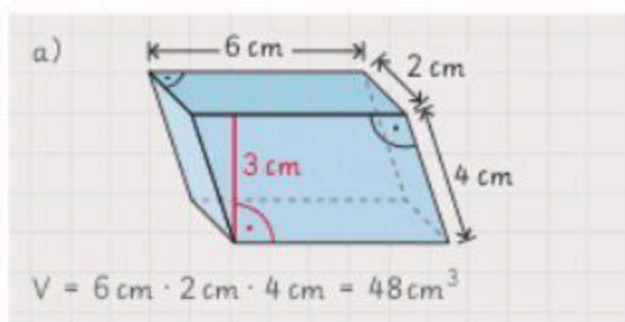
Teste dich!

- 3 a) Berechne das Volumen des Körpers.
b) Skizziere das Schrägbild eines Quaders, der die gleiche Höhe und das gleiche Volumen hat wie der Körper und beschrifte den Quader mit seinen Maßen.



→ Lösungen, Seite 238

- 4 **Finde den Fehler!**
Beschreibe, was falsch gemacht wurde. Verwende Fachbegriffe. Die Begriffe auf dem Rand können helfen. Berechne anschließend die richtige Lösung im Heft.



b) Gegeben sind das Volumen $V = 200 \text{ cm}^3$ und der Radius $r = 2 \text{ cm}$ der Grundfläche eines schiefen Zylinders. Berechne die Höhe h .

$$V = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot h = 200 \text{ cm}^3 \quad | : 2 \text{ cm}^2$$

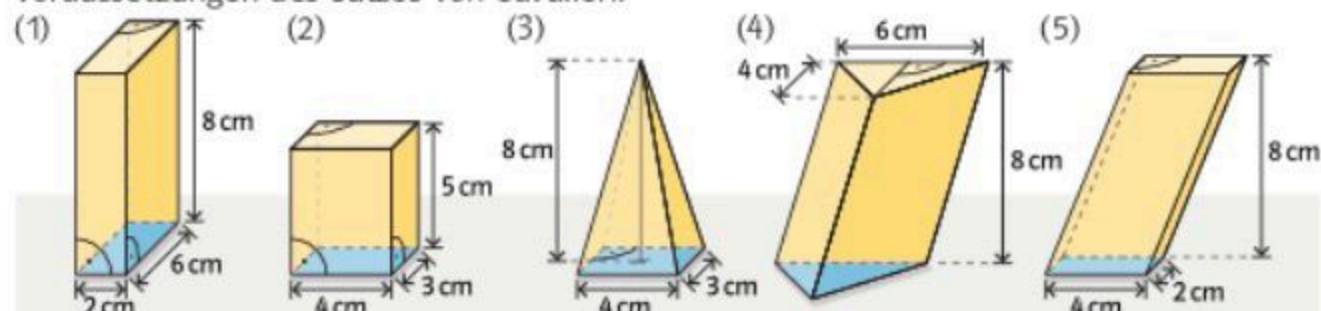
$$\pi \cdot h = 100 \text{ cm} \quad | : \pi$$

$$h = 31,8 \text{ cm}$$

Wortliste

- die Grundfläche
- die Deckfläche
- die Höhe
- senkrecht zu
- das Volumen
- ein Rechteck
- ein Quader
- ein Kreis
- ein Zylinder

- 5 Entscheide, welche Körper das gleiche Volumen besitzen. Prüfe hierfür jeweils die drei Voraussetzungen des Satzes von Cavalieri.



- 6 Skizziere zwei Körper, die als zueinander parallele Grund- und Deckflächen ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 4 cm und jeweils eine Höhe von 6 cm haben, deren Volumen aber trotzdem nicht gleich ist.

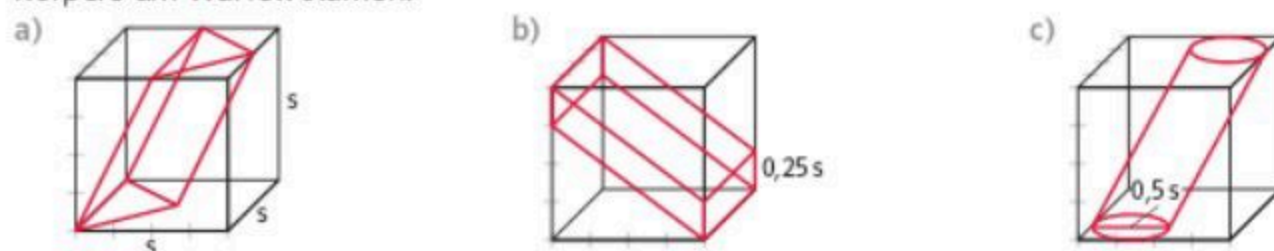
Teste dich!

- 7 **Wahr oder falsch?**
Beurteile, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist und begründe.
- a) Ein gerades Prisma hat immer den gleichen Rauminhalt wie jedes schiefe Prisma mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe.
- b) Ein Zylinder und ein Kegel haben die gleiche Höhe und den gleichen Kreis als Grundfläche, also haben sie auch das gleiche Volumen.

→ **Lösungen**, Seite 239

In einem schiefen Prisma sind die Seitenflächen teilweise Parallelogramme und keine Rechtecke.

- 8 Stelle für den roten Körper im Würfel jeweils eine Formel zur Berechnung des Volumens in Abhängigkeit von s auf und bestimme den prozentualen Anteil des Volumens des roten Körpers am Würfelvolumen.



Teste dein Grundwissen! Lösungsmengen von Gleichungen

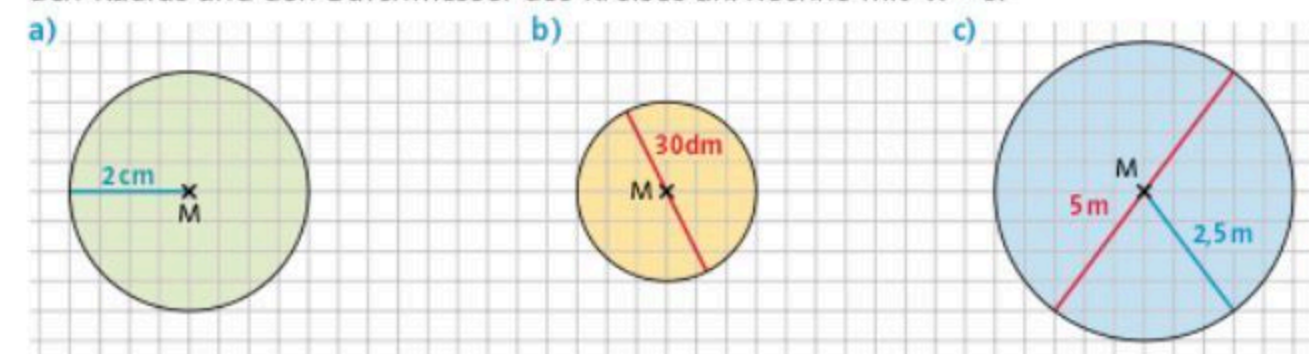
- 9 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.
- a) $-\frac{1}{2}(-\frac{2}{3}x - 5) = 2,5 + \frac{1}{3}x$ b) $-(0,5 - 0,25x) = 1,5x - 2$ c) $-\frac{3}{5}x + 4 + x = 0,4x$

→ **Grundwissen**, Seite 208
Lösungen, Seite 239

→ **Lösungen**, Seite 239

Wiederholen und Üben

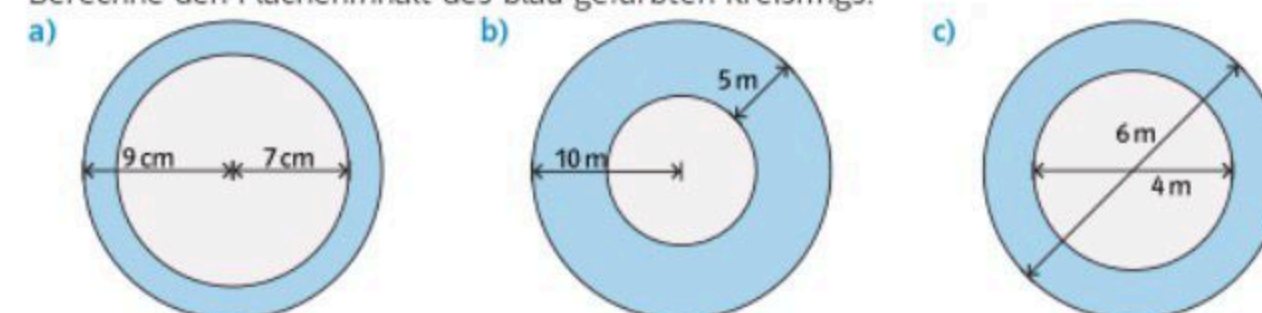
- 1 Bestimme näherungsweise den Umfang und den Flächeninhalt des Kreises. Gib jeweils den Radius und den Durchmesser des Kreises an. Rechne mit $\pi \approx 3$.



- 2 Entscheide, welche der beiden blauen bzw. grünen Strecken dem Umfang des jeweiligen Kreises entsprechen. Schätze zunächst. Lies dann den Radius des Kreises ab und berechne die Streckenlänge näherungsweise mit $\pi \approx 3$.



- 3 Berechne den Flächeninhalt des blau gefärbten Kreisinges.

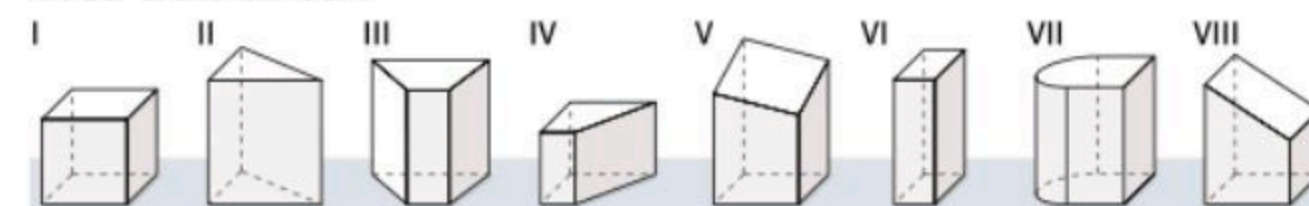


- 4 Bestimme aus den Angaben den Radius des Kreises.
- a) $U = 68 \text{ m}$ b) $A = 160 \text{ cm}^2$ c) $U = 4,8 \text{ cm}$ d) $A = 29 \text{ mm}^2$

- 5 Ein kreisförmiger Tisch hat einen Durchmesser von 1,10 m. Bestimme die Kantenlänge eines flächengleichen quadratischen Tisches.

- 6 Berechne den Flächeninhalt und die Bogenlänge des Kreisausschnitts.
- a) $r = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$ b) $r = 1 \text{ m}$, $\alpha = 240^\circ$ c) $r = 25 \text{ m}$, $\alpha = 9^\circ$

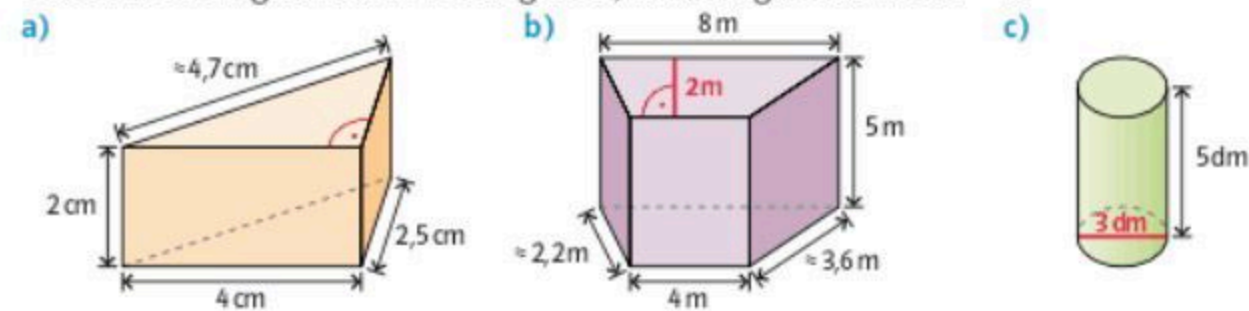
- 7 Entscheide, welche der abgebildeten Körper Prismen sind. Gib für die Prismen jeweils die Art der Grundfläche an.



Teste dich!

Kopiervorlage
Check-out
2n79pi

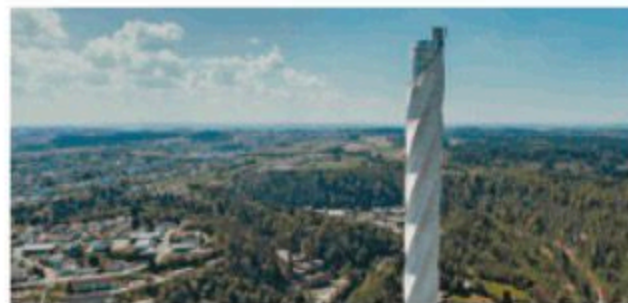
- 8 Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas bzw. des Zylinders. Berechne die Ergebnisse in Teilaufgabe c) näherungsweise mit $\pi \approx 3$.



- 9 Berechne das Volumen eines Prismas mit der Höhe $h = 7$ cm, dessen Grundfläche
- ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 5 cm und 12 cm ist,
 - ein Dreieck mit der Grundseite 10 cm und der Höhe 6 cm ist,
 - ein Trapez mit den Grundseitenlängen 4 cm und 8 cm sowie der Höhe 3 cm ist.
- 10 In Hamburg steht das 21 m breite Bürogebäude Dockland. Die Seitenfläche ist ein Parallelogramm mit 134 m Länge und 25 m Höhe. Berechne das Volumen des Gebäudes.

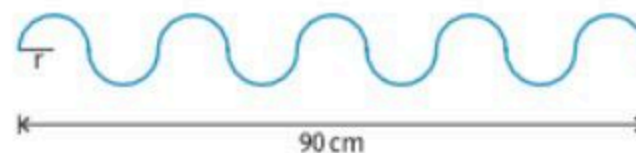


- 11 In Rottweil wurde 2017 der Turm mit der höchsten öffentlichen Plattform für Besucher in Deutschland eröffnet. Der Turm ist 246 m hoch und hat einen Radius von 10,5 m. Im Durchschnitt ist die Außenmauer des Turms 31 cm dick. Berechne die ungefähre Menge an Beton, welcher für die zylinderförmige Innenschale verbaut wurde.

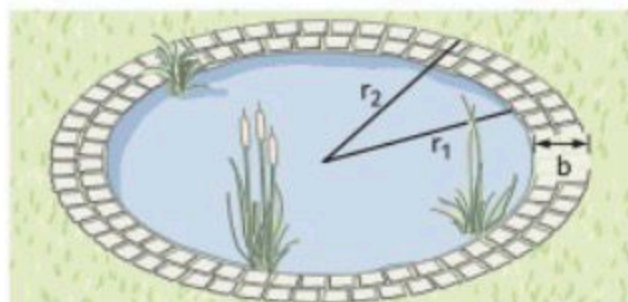


Wiederholen und Üben

- 12 Ein Stück glattes Blech soll zu Wellblech verformt werden, dessen Querschnitt sich aus aufeinanderfolgenden Halbkreisen mit dem Radius r zusammensetzt. Berechne, wie viele Meter glattes Blech man für ein 90 cm breites Wellblech benötigt.

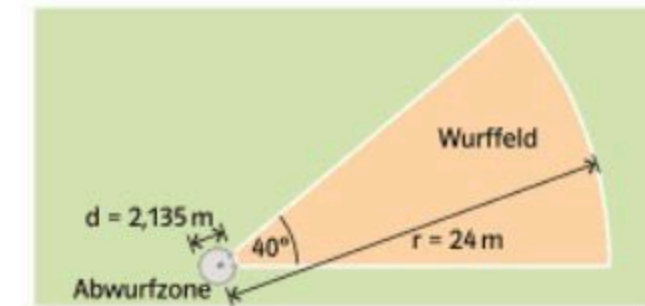


- 13 Ein kreisrunder Seerosenteich hat den Radius $r_1 = 7$ m.
- Um den Teich wird ein 2 m breiter Weg angelegt. Berechne, welchen Flächeninhalt der Weg hat.
 - Bestimme wie breit der Weg wäre, wenn sein Flächeninhalt 130 m^2 betragen würde.



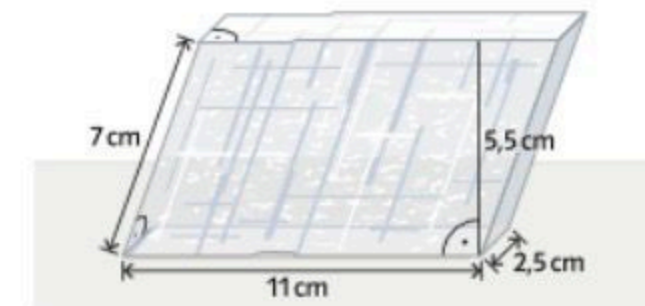
- 14 Für Kugelstoßanlagen sind die Maße $d = 2,135$ m und $\alpha = 40^\circ$ vorgeschrieben. Bei der Ausführung in der Figur beträgt der Radius $r = 24$ m.

- Bestimme den Flächeninhalt der Abwurfzone und des Wurfes der Anlage.
- Berechne die Zaunlänge der kreisrunden Abwurfzone.



- 15 Kalzit oder Doppelspat ist ein häufig vorkommendes Mineral, welches in Form von schiefen Prismen kristallisiert.

- Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des abgebildeten Doppelspats.
- 1 cm^3 wiegt ca. 2,6 g. Berechne die Masse des abgebildeten Prismas.



- 16 Die Weltraumrakete Ariane 5 hat vier zylinderförmige Treibstoffbehälter. Die beiden seitlichen Treibstoffbehälter in den „Strap-on-Boostern“ sind 31,6 m lang und haben einen Durchmesser von 3,0 m. Die Behälter der 1. und 2. Stufe im Mittelteil haben beide einen Durchmesser von 5,4 m und sind 30,7 m bzw. 4,5 m lang.

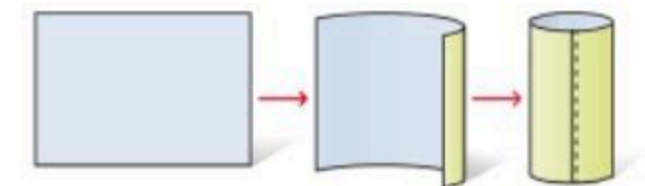
- Beurteile, ob die beiden seitlichen Treibstoffbehälter zusammen mehr Treibstoff enthalten als die Behälter im Mittelteil. Schätze zuerst und rechne dann.
- Die „Strap-on-Booster“ werden zuerst verwendet und, direkt nachdem sie aufgebraucht sind, in einer Höhe von 55 km leer abgetrennt. Bestimme, wie viele Liter Treibstoff die Rakete für diese Strecke durchschnittlich pro Kilometer verbraucht.
- Vergleiche den Treibstoffverbrauch mit dem Verbrauch eines Autos, indem du z.B. untersuchst, wie viele Kilometer ein Kleinwagen mit Verbrennungsmotor mit der gleichen Menge Treibstoff fahren könnte.
- Recherchiere im Internet über die Geschichte der Raumfahrt und dem Ziel der Raumfahrt sowie den ökologischen Konsequenzen von „Weltraumtourismus“.



- 17 Handwerker benutzen zur Kreisumfangsberechnung oft die folgende Faustformel: „Kreisumfang gleich Durchmesser mal 3 plus 5 Prozent vom Ergebnis“.

- Berechne den Umfang eines Kreises mit $r = 5$ cm mithilfe der Faustformel.
- Berechne den Näherungswert für π , der bei dieser Faustformel verwendet wird.

- 18 Ein DIN-A4-Blatt (ca. 21 cm breit und ca. 29,7 cm lang) wird an den kurzen Seiten zusammengeklebt, sodass eine Rolle (Zylinderform) entsteht. Der überlappende Kleberand beträgt dabei 7 mm.



- Bestimme den Umfang der Papierrolle.
- Bestätige durch eine Rechnung, dass der Radius der Rolle ca. $r \approx 4,62$ cm beträgt.
- Bestimme das Volumen des entstandenen Zylinders.
- Man kann das DIN-A4-Blatt auch entlang der kurzen Seite zusammenrollen, sodass eine längere und schmalere Rolle entsteht. Bestimme das Volumen, wenn man auch hier 7 mm für den Kleberand benötigt und berechne, um wie viel Prozent das Ergebnis von dem Ergebnis aus Teilaufgabe c) abweicht.

- 8 Bestimme die fehlenden Größen. Runde die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

a) Prisma mit dreieckiger Grundfläche

G_{Dreieck}	5 cm	10 m	6 dm	10 dm
h_{Dreieck}	2 cm	3 m		
h_{Prisma}	3 cm		11 dm	7 dm
V_{Prisma}		75 m ³	66 dm ³	350 l

b) Zylinder

$r_{\text{Grundfläche}}$	8 cm	6 m	1,7 cm	2,5 m
h_{Zylinder}	3 cm	2 m		
V_{Zylinder}			82 cm ³	80 cm ³

- 9 Charlotte hat in ihrem Heft die Rechnungen rechts zum Thema „Prismen“ notiert.

a) Finde ein Problem, das zu Charlottes Rechnung passt.
b) Beschreibe dein Vorgehen.

$$1) 900 \text{ cm}^3 : 30 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$$

$$2) 30 \text{ cm}^2 : 6 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

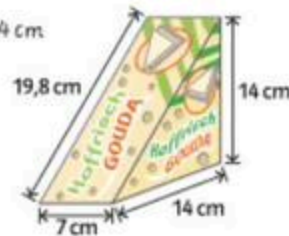
- 10 Finde den Fehler!

Beschreibe, was falsch gemacht wurde. Verwende Fachbegriffe. Die Begriffe auf dem Rand können helfen. Korrigiere die Lösung anschließend im Heft.

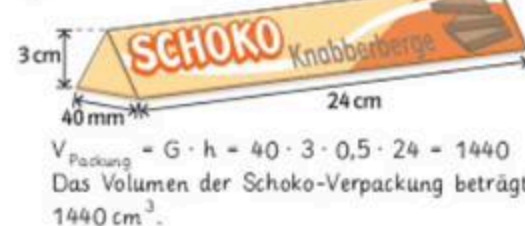
a) $V_{\text{Packung}} = G \cdot h$

$$= 7 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm}$$

$$= 1372 \text{ cm}^3$$



b)



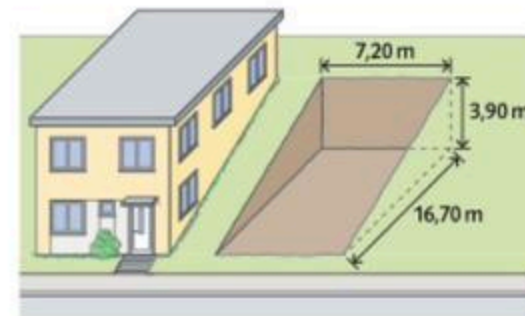
Wortliste

- die Grundfläche
- die Höhe
- rechtwinklig
- die Grundseite
- das Dreieck
- das Prisma
- die Einheiten

- 11 Bei einem Haus am Hang wird die Baugrube so ausgehoben, dass die Bodenplatte waagrecht ist.

a) Berechne, wie viele Kubikmeter Erde durch das Ausbaggern abtransportiert werden müssen.

b) Bestimme, wie tief eine Baugrube gleichen Volumens für ein Haus mit gleichem Grundflächeninhalt wäre, wenn es auf einem ebenen Grundstück stünde.



- 12 Bestimme, wie viele cm² Blech man für die Herstellung einer Konservendose mit dem Durchmesser d und dem Volumen V benötigt, wenn für den Rand und den Verschnitt 15% Blech hinzugerechnet werden.

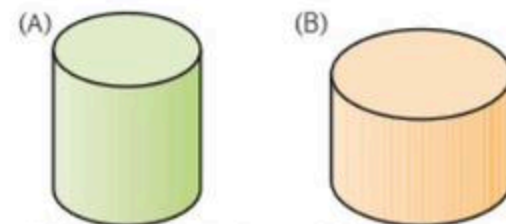
a) d = 1 dm; V = 1 l b) d = 80 mm; V = 0,5 l c) d = 25 cm; V = 2 l

- 13 Die Formen der Getränkedosen A und B mit den Maßen Höhe $h_A = 1,7 \text{ dm}$ und Radius $r_A = 0,9 \text{ dm}$ bzw. $h_B = 1,3 \text{ dm}$ und $r_B = 1,1 \text{ dm}$ werden untersucht.

a) Schätzt, welche Dose das größere Volumen bzw. den größeren Oberflächeninhalt hat.

b) Kontrolliert eure Schätzungen rechnerisch mithilfe der angegebenen Maße.

c) Ermittelt verschiedene Maße für Dosen mit einem Volumen von einem Liter. Untersucht, bei welcher dieser Dosen der Materialverbrauch am geringsten ist.



Vertiefen
Seite 95, Aufgabe 18

- 14 a) Schätze die Abmessungen des Tanks auf dem Foto. Beschreibe dein Vorgehen.
b) Bestimme nun, wie viele Liter Treibstoff ungefähr in den Tank passen.
c) Vergleiche eure Ergebnisse.
d) Ferdi behauptet: „Wenn ich die Maße des Tanks nur halb so groß schätze wie Aris, dann erhalte ich auch nur die Hälfte des Volumens.“ Überprüfe, ob Ferdi recht hat.



Anwenden
Seite 95, Aufgabe 16

Teste dich!

- 15 Die Sarone-Schokolade wird in einem besonderen Karton verpackt (Fig. 1).
a) Bestimme, wie viele cm³ Schokolade die Schachtel enthält, wenn man 25% des Volumens der Verpackung für Luft zwischen Verpackung und Schokolade einplant.
b) Berechne, wie viele cm² Karton man für die Verpackung benötigt, wenn zusätzliche 10% für Klebeflächen zu berücksichtigen sind.
c) Bestimme für das gleiche Verpackungsvolumen die Länge des Kartons, wenn dieser ein Prisma mit dem Querschnitt aus Fig. 2 als Grundfläche besitzt.



Fig. 1

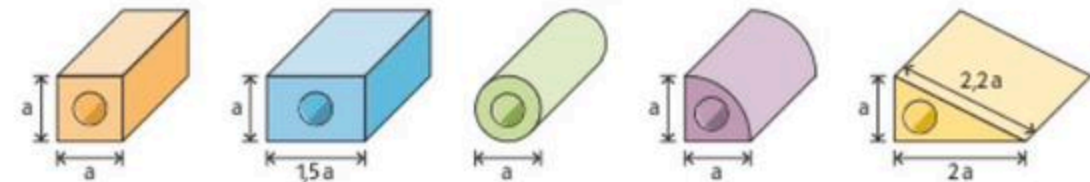


Fig. 2

- 16 Bestimme den Radius eines Zylinders mit einer Höhe von 12 cm und einem Volumen von 360 cm³.

- 17 Die folgenden durchbohrten Körper haben alle die Länge $2 \cdot a$. Das kreisrunde Bohrloch hat jeweils den Durchmesser $d = \frac{a}{2}$.

a) Bestimme für jeden Körper das Volumen und den Oberflächeninhalt für $a = 4 \text{ cm}$.
b) Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt für ein allgemeines a .
c) Ermittle, für welchen Wert von a das Volumen jeweils 100 cm³ beträgt.



- 18 Begründe die folgende Aussage: Wenn bei einem Zylinder oder einem Prisma der Flächeninhalt der Grundfläche G , der Oberflächeninhalt O und das Volumen V bekannt sind, kann man den Umfang der Grundfläche mit der folgenden Formel berechnen:

$$U = \frac{O \cdot G}{V} - 2 \cdot \frac{G}{V}$$

Teste dein Grundwissen!

Probleme lösen mithilfe von Gleichungen

- 19 Carlos Mutter ist heute 6-mal so alt wie Carla. In vier Jahren ist die Mutter 30 Jahre älter als Carla. Bestimme das Alter von Carla und ihrer Mutter heute.

Anwenden
Seite 95, Aufgabe 17

Grundwissen, Seite 208
Lösungen, Seite 238